الاساليب الاحصائية

الدكتور بجالا روري

الدكتورش بق العتني

المنصنا والشاؤوا لإرابيّة كليّة الانتصناء والشاؤوا الإرابيّة الجاومة الأردبيّة الإردبيّة





الأساليبالإحصائية الجزالث في

١

للوه مركاء دِی کل رخمتين به تخدل در الاومعاء في رفج الات راخت انتخا د الخوان ا

رقم الاجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر ٤٥٥/ ٧/٥٥ رقم الايداع لمدى دائرة المكتبسات والوثائق الوطنية ٥٥/٧/٧٠

الأساليبالإحصائية

الجزرالثاني

الدكوتورشف في العنبي

كليَّة الالمتصنّاد والحُنائوذ الإداديّية الجامِدَة الأدنيّنة الأكتون نجالا اردي

كليَّة الافتصرَّاد والعُلُوْ فِالإِدَادِيَّة الكابعكة الأدْمِنتَة

الطَّبْعَدَة الأولىٰ ١٩٩٥



حقوق الطبع محفوظة الطبعة الأولى 1990



كار المناهج للنشر والتوزيع

اول ملاوع جيل الحسون - سرفيس خط ٩ هاتف ١١٦٦٠٧ - هاڪس ١١٦٦٠٧ مريب ٢١٥٢٠٨ عمان ١١١١٧ الأردن

المقرمتم

لقد شهد علم الاحصاء تطوراً واسعاً في النصف الثاني من هـذا القرن وأصبح يستخدم في جميع العلوم النظرية والتطبيقية، وكمان من جملة هذه العلوم التي دخل الاحصاء في خدمتها بصورة واسعة علمي الاقتصاد والادارة. ولقد تُرجم هذا الاهتهام المتزايد بعلم الاحصاء بوفرة في الكتب والمقالات بمختلف اللغمات الحية تشرح وتبسط استخدام الإحصاء في هذه العلوم.

إن كل هذا الرخم من الكتابة في علم الإحصاء لم تنل منه اللغة العربية إلا نزراً يسيراً، لذلك فإن المؤلفين قد جهدا لتقديم هذا العمل المتواضع علّه يسهم في سد بعض النقص الشديد الذي تعانيه المكتبة العربية في هذا المجال.

ولقد حاول المؤلفان تبسيط الأفكار والنظريات الاحصائية الواردة في هذا الكتاب وجعلها في متناول الطلاب والباحثين في جميع العلوم الانسانية وخاصة في عالات الاقتصاد والادارة وذلك بتقديم العديد من الأمثلة والتهارين المحلولة وإضافة الوفير من الأسئلة والتهارين غير المحلولة في آخر كل باب من الأبواب الثهائية.

والله وليالتوفيق \كوُلغان^ي



الباب الأول

بعض الادوات الرياضية

يشتمل هذا الباب على مقدمة تتعلق بدراسة بعض الأدوات الرياضية التي تهم الإحصائيين والإقتصاديين والإداريين والتي تعتبر أساسية لاستيماب وفهم الكثير من القضايا الإحصائية المطروحة في الأبواب اللاحقة في هذا الكتباب. وسوف نعرض بشكل مختصر المواضيع والنظريات التالية:

نــظرية الفئــات Set Theory، التبــاديــل والتــوافيق Combinations and المحـدات والمصفوفات -De المحـدات والمصفوفات -De المحـدات والمصفوفات -De المحـدات والمصفوفات -De المحـدات والمحـدات والمحـدات المراضية اللازمة عاداً المراضية المراضية المراضية المراضية المراضية المراضية المراضية المراضية المراضية المراضورة عاداً الماب المابية المابية ماشرة .



الفصل الأول

نظرية الفئات

تلعب نظرية الفئات دوراً أساسياً في الرياضيات الحديثة ويـزداد استخدامهـا في مجالي الاحصاء والاقتصاد، وفي هذا الفصــل سوف نعــرض بعض الخصائص الأوليـة لهذه النظرية.

(۱ ـ ۱ ـ ۱) تعریف:

يمكن تصريف الفئة عبل أنها مجموعة من العناصر (أرقىام، أحرف، كتب، طلاب... الغ) المحددة والمعرفة تعريفاً واضحاً.

من هذا التعريف يتضح أن مجموعة من ثلاثة كتب، مجموعة من الطلاب في مدرسة معينة، مجموعة من ٥٢ من أوراق اللعب هي مجرد أمثلة على الفتات.

إذا رمزنا للفئة بالرمز أ وعناصرها بالرمز أر، ر = ١، ٢، فإنــه بمكن التعبير عن انتهاء العنصر أر للفئة أ على النحو التالي :

1 e 1

أما إذا لم يكن أر عنصراً من عناصر الفئة فإنه يمكن أن يُعبّر عن عدم انتهائه إلى الفئة كيا يلي:

ار≰ا

مشسال:

إذا كانت الفئة أ مكونة من الأرقام التالية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فإن كل رقم من هذه الأرقام يعتبر عنصراً من عناصر ها هذه الأرقام يعتبر عنصراً من عناصر الفئة أ، ويُعبّر عن هذه الفئة بوضع عناصرها داخل أقواس على النحو التالي:

وبناء على ما سبق فإن ٣ ∈ أ. ه ∈ أ. ٩ ﴿ أ

هذا ويمكن أن تتكون الفئة من عنصر واحد (الرقم ٧ مثلًا) كما يلي:

ب ≃ {v}

(۲ ـ ۱ ـ ۱) تعریف:

إذا لم تحتوي الفئة على أي عنصر من العناصر فإنها تسمى بالفئة الفارغة ونرمـز لها بالرمز φ ومثال على ذلك فئة الأشخاص الذين يعيشون إلى الأبد.

هذا ويجب التفريق بين الفئة الفارغة φ والفئية الصفرية {صفر} التي تحتوي على عنصر واحد هو الصفر.

(۳ ـ ۱ ـ ۱) تعریف:

إذا كانت لدينا الفتتان أ، ب فإننا نقول بأن الفتة أ تساوي الفتة ب فقط إذا كان كل عنصر من عناصر الفئة أ موجوداً في الفئة ب وفي نفس الوقت كمل عنصر من عناصر الفئة ب موجوداً في الفئة أ، يمعني أن تحتوي كل فئة من هذه الفئات تماماً عملي كل عنصر تحتويه الفئة الأخرى ويعبر عن هذه العلاقة على النحو التالي؛

ا = ب

وإذا كانت الفئتان غير متساويتين فإننا نعبّر عن عدم المساواة على النحو التالي:

ا ≠ ب

مع العلم بأن الإشارات (=، ≠) لا تتضمن المعنى الجبري المعتاد للتساوي وعدمه.

(٤ ـ ١ ـ ١) تعريف:

إذا كانت لدينا الفئتان أ، ب بحيث أن كل عنصر من عناصر الفئة أ عنصر في الفئة ب ويكن التعبير عن ذلك كما يلي: الفئة ب فإننا نقول بأن الفئة أ فئة جزئية من الفئة ب ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي: أ ت ب

أى أن الفئة أ محتواة في الفئة ب

او ب 🔾 آ

أي أن الفئة ب تحتوي على الفئة أ.

وباستخدام فكرة الاحتواء في نظرية الفئات فإننا نستطيع إعادة تعريف تساوي الفئتين أ، ب كها يلي:

تعتبر الفئتان أ، ب متساويتين (أ = ب) فقط إذا كان لدينا أ \subseteq ب وفي نفس الوقت \subseteq أ

مثال:

إذا كانت لدينا الفئات التالية:

ا= ب ا≠ جـ

وبصورة عامة فإن الفئة الفارغة ϕ تعتبر فئة جزئية من أية فئة مثل أ $(\phi igcirc$ أ)

(٥ .. ١ .. ١) تعريف خصائص الاحتواء:

إذا كانت لدينا الفئات أ، ب، جـ فإن كل فئة من هذه الفئات هي جزئية من نفسها أي أن: أ \subseteq أ، ب \subseteq ب، جـ \subseteq جـ

وهذا يعني أن خاصية الاحتواء في الفشات انعكاسية Reflexive أما إذا كان أ ب أن خاصية الاحتواء في أ ب أن خاصية الاحتواء في الفئات لست تبادلية Anti-symmetric

فإن جـ □ أ

أى أن خاصية الاحتواء في نظرية الفئات متعدية Transitive

(١ - ١ - ١) تمريف الفئة الشاملة: Exhaustive Set

تعرف الفئة الشاملة (أو فراغ المعاينة) لغرض معينٌ على أنها الفئة التي تشتمل على جميع المناصر الداخلة في إطار المناقشة أو الدراسة ويرمز لها بالرمز ف. فإذا أردنا أن نقوم بدراسة عن طلبة الجماعة الاردنية مثلاً فإن الفئة الشماملة في هذه الحالة تشتمل على جميل طلبة الجامعة.

هذا وقد لا يكون فراغ المعاينة معرفاً تصريفاً تـاماً ولكنـه يمكن أن يفهم عمومـاً من سياق المناقشة، وتعتبر جميع الفئات في الموضوع مدار البحث فئات جزئية من فراغ المعاينة Sampling Space

مشال:

إذا كانت الفئة الشاملة ف تمثل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت الفئة أ تمثل الأعداد الفردية الموجبة والفئة ب تمثل الأعداد الزوجية الموجبة فإن الفئتين أ، ب تعتبر كل منها فئة جزئية من الفئة الشاملة ف، أي أن

ا 🗆 ف

ب⊂ن

(۱ ـ ۱ ـ ۱) تعریف الفئة المكمّلة: Complementary Set

إذا كانت أفئة جزئية من الفئة الشاملة ف فإننا نعرف مكمّل الفئة أ بالنسبة للفئة ف على أنه فئة تحتوي على كل العناصر الموجودة في الفئة الشاملة ف وغير المجودة في الفئة أ، ويعرّب عن ذلك كيا يل:

يجوداني،ست،برويہ آھن⊸ا

ويمكن توضيح ذلك باستخدام طريقة فن كها هو ميين في الشكل (١ ـ ١ ـ ١)

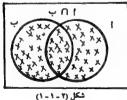


(٨ - ١ - ١) عمليات الفئات

- U1

الاتحاد أو الجمع: (Union (or Sum

يعرف الاتحاد بين فتتين أ، ب على أنه فئة تحتوي عـلى كل العنـاصر التي تنتمي إلى الفئة أ أو الفئة ب أو كليهها معاً ويعبر عن هذا الاتحاد كيا يلي:



ويمكن توضيح هذا الاتحاد كها هو مبـين في الشكل (٢ ـ ١ ـ ١)

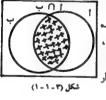
وبشكل عام إذا كانت لدينا الفئات أر، ر = ١، ٢ ، ن فـــإن اتحـــاد هــــــــــــــــــــــا يلي

ويمكن استخدام أشكال فن لتوضيح هذه العلاقة مع ملاحظة أن هذه الأشكال تصبح أكثر تعقيداً كلها زاد عدد الفئات.

مشسال:

التقاطع أو الضرب: (Intersection (or product

يعرّف تقاطع الفئة أ مع الفئة ب عمل أنه فئة تحتوي عملى كل العنـاصر التي تنتمي إلى كل من الفئتين أ، ب معاً، ويعبر عن هذه العلاقة كها يلي:



مشال:

J 01

إذا كانت الفئة أ
$$= \{7, 3, 0, 7, 7\}$$

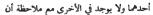
والفئسة ب $= \{7, 7, 3\}$
فإن أ \cap ب $\{7, 3\}$

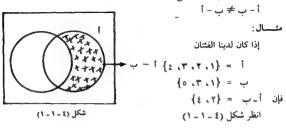
وإذا كان تقاطع الفتتين أ، ب فئة فارغة (أي أن الفتتين لا تحتويان على عناصر مشتركة) أي أن أ ∩ ب = φ

فإننا نقول بأن الفتتين أ، ب غير متقاطعتين (منفصلتين).

طرح الفئسات: Subtraction of Sets

يعرف الفرق بـين الفئتين أ، ب عـل أنه فئـة تحتوي عـل كل عنصر يــوجد في





وإذا كانت الفئة أ هي الفئة الشاملة (فراغ المعاينة)فإن الفرق بين أ. ب يسمى مكمّل الفئة أ بالنسبة لفراغ المعاينة ب

- ب = ب أ

Finite and Infinite sets

(١-١-١) الفئات المحدودة وغير المحدودة

تعرّف الفئة المحدودة على أنها الفئة التي يمكن مقابلة كمل عنصر من عناصرهما برقم من الأرقام الطبيعية مثل عدد الطلاب في أحد الصفوف، عدد المقاعد في مكمان عدد، عدد الكتب في احدى المكتبات. أما الفئة غير المحدودة فهي التي لا نستطيع أن نحصر عناصرها ولكننا نستطيع مطابقة كل عنصر من عناصرها واحداً بواحد مع فئة غير محدودة من الأرقام مثل عدد النجوم.

(١٠ - ١ - ١) الفئات المعدودة وغير المعدودة

Countable and Uncountable Sets

تعرّف الفئة المعدودة على أنها الفئة التي بمكن مطابقة عناصرهــا مع عنــاصر فئة

من الأرقام الطبيعية، في حين تعرّف الفئة التي لا يمكن مطابقة عناصرهامع عناصر فئة الأرقام الطبيعية على أنها فئة غير معدودة

(۱۱ - ۱ - ۱) الفئات المتصلة والمقطعة (۱۱ - ۱ - ۱)

يعرف فراغ المعاينة ف على أنه فراغ معاينة متقطع إذا كنان يحتوي على عدد عدود من النقاط أو على عدد غير محدود من النقاط (لا نهاية) التي يمكن مطابقة عناصرها مع عناصر فئة من الأرقام الطبيعية الصحيحة الموجبة. ومن الأمثلة على ذلك عدد الطلاب، عدد الكتب. . . الخر.

أما فراغ المعاينة المتصل فهو فـراغ المعاينـة الذي يحتــوي على نقــاط غير محــدودة وغير معدودة ومن الأمثلة على ذلك أطوال الطلاب في إحدى المدارس وأوزانهم.

(۱۲ ـ ۱ ـ ۱) بعض العلاقات الجبرية بين الفتات

يوجد علاقات جبرية همامة في نـظرية الفشات نشير هنما إلى بعضها وتستخـدم أشكال فن في برهنتها.

إذا كانت الفئة الشاملة ف هي

والفئات الجزئية أر، أم، أم هي

$$\hat{I}_{v} = \{t_{1}, Y_{1}, Y_{2}, F_{3}, \Lambda_{3}, \ell\}$$

فإننا باستخدام أشكال فن نستطيع إثبات صحة العلاقات التالية:

ويمكن تعميم هـ أم القاعـ له لأي عدد من الفشات حيث يتم طرح التقـاطمات الزوجية وإضافة التقاطعات الفردية للفئات الموجودة في الاتحاد.

الفصل الثاني

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

يهدف هذا الفصل، الذي سيكون له تطبيقات كثيرة في الفصول القادمة، إلى تعداد الأشكال المختلفة للمجموعات التي يمكن تكوينها من أشياء مفروضة من زمرة واحدة ضمن شروط معروفة مقدماً، كما سيتم استكمالا لهذا البحث إستعراض نظرية ذات الحدين.

(۱ - ۲ - ۱) التباديل

لإعطاء فكرة عن مفهوم التباديل فإننا نبدأ بالمثال التالي:

إذا كان الطريقان الرئيسيان اللذان يربطان بين مديني عهان واربدهما أ، ب (طريق جرش وطريق المفرق) فإنه يمكن توضيح الطرق التي يمكن أن تسلكها السيارة في الذهاب والأياب بين المدينتين على النحو التالي:

> طريق الذهاب أ ب ب طريق العودة أ ب أ ب

ويـلاحظ هنا بـأن الذهـاب يمكن أن يتم بالـطريقين وأن كـل طويق من طـوق الذهاب يمكن أن يقترن بطريق من طرق العودة.

قاعدة:

ويمكن تعميم هذه القاعدة لأي عدد من العمليات.

تشكيل وتعداد التباديل له ن من العناصر:

إذا كانت لدينا مجموعة من العناصر عددها ن فيإننا نحصل على كـل التباديـل الممكنة لهذه العناصر إذا تم توزيعها حسب الأشكال (التراتيب) الممكنة.

فمثلاً إذا كان لدينا ثلاث بطاريات أ، ب، جـ من ثلاثة أحجام مختلفة فإنسا نستطيع ترتيب البطاريتين أ، ب بعدد من الطرق ٣٠٣، وفي هذه الحالة فيإنه لا يبقى للبطارية حـ سوى مكان واحـد وبالتـالي فإن عـدد الطرق الممكنة لترتيب البـطاريات الثلاث ٣٠٣٠.

ويمكن تعميم هـذه القاعـدة لأي عـدد من العنـاصر، فـإذا كــان لـدينــا ن من العناصر ونريد توزيعها بكل الطرق المكنة فإن عدد هذه الطرق

= ز!

أي أن عدد الطرق التي يمكن بواسطتها ترتيب ن من العناصر يساوي مضروب Factorial نـ

أما إذا كان لدينا ن من العناصر وأردنا أن نختار من بينها ر عنصراً فإننا نستطيع ترتيبها بعدد من الطرق

$$(1+j-3)$$
 $(Y-3)$ $(1-3)$ $3=$

ویسمی هذا المقدار ن تبادیل ر

(٢ - ٢ - ١) التوافيق

إذا تقدم أربعة أشخاص للحصول على بعثة دراسية وكان المطلوب هو اختيار النين منهم، فإن عدد طرق اختيار الممكنة هو $\frac{3 \times 7}{1 \times 7} = 7$ ويمكن حصرها على النحو التالى:

أب أج_ر أد ب ج ب د جد

وهذا يعني أن هنالك ست طرق ممكنة للاختيار وتسمى هذه الطريقة في الاختيار بالتوافيق. وبشكل عام إذا كـان لدينـا ن عنصر وأردنا إختيـار ر عنصر منها بصرف النـظر عن الترتيب فإن عدد طرق الاختيار الممكنة هو ^{نق}ور ويرمز له أحياناً بالرمز (^ن).

من الواضح أن عدد التوافيق أقبل من عدد التباديل لأننا في حالة التوافيق لا نهتم بالترتيب حيث أن إرسال أ، ب في بعثة دراسية عاشل تماماً إختيار ب، ألنفس البعثة. أما في حالة التباديل فإننا نهتم بالتراتيب فإذا كان المطلوب هو منح جائزتين فالأولى لمن يأتي في الترتيب الأول والثانية لمن يأتي في الترتيب الثاني والفرق واضح بين الترتيين (أ، ب)، (ب، أ). ويرجع هذا إلى أننا في حالة التباديل لعدد من العناصر نقوم بعمليتين منفصلتين:

الأولى هي عملية الإختيار للعناصر الداخلة في المجموعة.

الثانية هي عملية الترتيب لهذه العناصر داخل المجموعات التي يمكن اختيارها في حين نركز الاهتهام في حالة التوافيق على عملية إختيار العناصر المداخلة في المجموعة بصرف النظر عن ترتيبها.

مثال:

إذا كان لدينا } أشخاص وأردنا إختيار لجنة مكونة من شخصين مع الإهتمام بترتيب الشخصين في اللجنة المختارة فإن عدد طرق الاختيار هو

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة على خطوتين:

عدد طرق اختیار ۲ من ۶ هو

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{3 \times 7}{7 \times 1} = T$$

عدد الطرق التي ترتب بها شخصين مختلفين هو ٢! = ٢

.. عدد طرق الإختيار = ٢×٢ = ١٢

وهي نفس النتيجة السابقة

هذا في حين أن عملية التوافيق تقتصر على الخطوة الأولى.

قاعدة ١:

$$\frac{10}{(1-7-7)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

قاعدة ٢:

$$1 = \frac{! \circ}{! \circ ! \circ ! \circ !} = \left(\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \end{array}\right)$$

حيث أن مضروب الصفر = ١ بالتعريف.

قاعدة ٣٠

$$|\vec{c}| > 0$$
 آوا کائٹ ر $|\vec{c}| = |\vec{c}| + 0$ آوا کائٹ ر $|\vec{c}| = |\vec{c}| = 0$ آوا کائٹ ر $|\vec{c}| =$

$$(1-1) = (1-1) = (1-1) = (1-1)$$

$$1 + i = i + \frac{ii}{1(i - i)} + i = i + i$$

$$i + i = \frac{ii}{1(i - i)} + i = i + i$$

$$i + i = \frac{(i + i)}{1(i + i)} = i + i$$

$$\begin{pmatrix} 1+3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{10}{100}}{\frac{1}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{100}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{100}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100}} = \frac$$

$$\frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{(\dot{0} - c + 1) + \dot{0}!}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{(\dot{0} - c + 1 + c)}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{(\dot{0} - c + 1)!}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{(\dot{0} + c)!}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} = \frac{\dot{0}!}{\dot{0}!} \frac{\dot{$$

تمرين ١:

إذا كان لدينا كيس به ٧ كرات بيضاء، ٦ كرات حراء، ٤ كرات سوداء، بكم طريقة يمكن سحب ١٠ كرات منها ٤ بيضاء، ٣ حراء، ٣ سوداء.

الحل:

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٤ كرات بيضاء من بين ٧ كرات هو

$$\Upsilon \circ = \frac{!V}{!(\xi - V)!\xi} = \begin{pmatrix} V \\ \xi \end{pmatrix}$$

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٣ كرات حمراء من بين ٦ كرات هو

$$r = \frac{r!}{r!} (r - r) r'$$

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٣ كرات سوداء من بين } كرات هو

$$(3) = \frac{3!}{\gamma! (3-\gamma)!} = 3$$

وحيث أن هذه العمليات ستحدث معاً فإن عدد الطرق المطلوب

$$= \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} 7 \\ 7 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} 3 \\ 7 \end{array}\right)$$

YA . . = { x Y . x 40 =

غرين ٢:

إذا كان لدينا ستة رجال، ست نساء وأربعة أطفال فبكم طمريقة بمكن إختيـار مجموعة مكونة من أربعة أفراد بحيث تحتوي على رجلين على الأقل.

الحل:

قد يكون لدينا مجموعة مؤلفة من رجلين (والباقي من النساء والأطفال) وعـد

الطرق في هذه الحالة هو

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1 (L-\lambda)_1}{L_1 (L-\lambda)_1} \times \frac{\lambda_1 (L-\lambda)_1}{\lambda_1 (L-\lambda)_1} = 0 \times 0 \times 0 = 0 \text{ A.}$$

وقد تكون لدينا مجموعة من ثلاثة رجال (والباقي طفـل أو امرأة) وعـدد الطرق في هذه الحالة هو

$$\lambda \cdot (\lambda \cdot \lambda) = \frac{\lambda_1 \cdot (\lambda - \lambda)}{\lambda_1 \cdot (\lambda - \lambda)} \times \frac{\lambda_1 \cdot (\lambda - \lambda)}{\lambda_1 \cdot (\lambda - \lambda)} \times (\lambda \cdot \lambda) \times (\lambda \cdot \lambda)$$

کیا قد تکون المجموعة کلها من الرجال وعدد الطرق في هذه الحالة $10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$

وبما أن أية حالة من حالة من الحالات السابقة تحقق المطلوب فبإن عدد الــطرق المكنة هم

$$= \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = 0$$

المقدار (أ + ب) مقدار جبري ذو حدين أ، ب، والنظرية التي تعطينا مفكوك (أ + ب) نسمى نظرية ذات الحدين، ويقول منطوق نظرية ذات الحدين أنه إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\frac{1}{(1-1)^{2}} = \frac{1}{10^{2}} + \frac$$

ولإثبات هذه النظرية يمكن الرجوع إلى كتب الرياضيات خواص معاملات مفكوك ذات الحدين:

وعدد حدود هذا المفكوك = ن + ١ أى أنه يزيد على قيمة الاس بواحد.

۲ ـ مجموع معاملات مفكوك ذات الحدين = ۲^ن

حيث أنه إذا كانت أ = ١، ب = ١

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \dot{\omega} \\ \dot{\gamma} \end{array} \right) + \dots + \left(\begin{array}{c} \dot{\omega} \\ \tau \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \dot{\omega} \\ \dot{\gamma} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \dot{\omega} \\ \dot{\omega} \end{array} \right) = \frac{\omega}{(1+1)} \frac{1}{2} \frac{$$

$$+$$
 ای آن $Y^{C} = \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \dots$

٣ـ رتب العالم الرياضي باسكال معاملات ذات الحدين في جدول سمي باسمه
 نوضحه أثناء دراستنا لتوزيع ذي الحدين في الفصل الأول من الباب الرابع.

عاملات الحدين المتساويين في البعد عن الطرفين متساويين، أي أن:
 معامل الحد الأولى ≈ معامل الحد الأخير
 معامل الحد الثانى ≈ معامل الحد قبل الأخير.

وبشكل عام فإن معامل الحد الذي ترتيبه ريساوي معـامل الحـد الذي تـرتيبه ن - ركيا يتضم من المعادلة (٤ ـ ٣ - ١)

٥ - لايجاد مفكوك (س - أ) فإننا نكتب هذا المقدار على النحو التالي

$$(m + (-1))^{C} = \frac{A_{C}^{C}}{A_{C}^{C}} \left(\begin{array}{c} C \\ C \end{array} \right) m^{C} \left((-1)^{C} \right)^{C}$$

$$= \frac{A^{C}}{A^{C}} \left((-1)^{C} \right) m^{C} \left((-1)^{C} \right)^{C}$$

٦- يمكن تطبيق نظرية ذات الحدين لايجاد مفكوك أي مقدار جبري بأي عدد من
 الحدود (ثلاثة أو أكثر وذلك بتجميع هذه الحدود في حدين وإيجاد المفكوك
 بالطريقة السابقة.



الفصل الثالث

المصفو فات

۱۰-۳-۱۱ تعریف:

تعرف المصفوفة Matrix على أنها منظومة من العناصر الموضوعة في عبدد من الصفوف والأعمدة المحاطة بأقواس كما يلي:

وتسمى الأرقام أو القيم أو عناصر المصفوفة حيث يشير الرمز إلى رقم الصف والرمز وإلى رقم العمود الذي يقم به هذا العنصر.

تسمى المصفوفة التي تحتوي على ن، صف ون، عمود مصفوفة من الترتيب ن, ×ن ويكن الإشارة إلى هذه المصفوفة كما يلي [أرر]ن, ×ن،

هذا وعك أن نعبر عن مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة أو غير المتجانسة بالصفوفات كما هو مين في المثال التالي

ويمكن استخدام المصفوفات في حل مثل هذه المعادلات

(۲ ـ ۳ ـ ۱) تعریف:

إذا كان عدد صغوف الصغوفة أيساوي عدد أعمدتها (أي أن ن:=ن;=ن) فإننا نقول بأن المصفوفة أنهن مصفوفة مربعة من الترتيب ن Square Matrix وتسمى العناصر الواقعة على القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة أ١١، أ٢٢، أند بالعناصر القطرية للمصغوفة Diagonal Elements ويسمى مجموع العناصر القطرية للمصفوفة أن مقدار المصفوفة Trace of أ

(٣-٣) تعریف):

Equal يقال بأن المصفوفتين أ = $\{i_{n}\}$ ، ψ = $\{\psi_{n}\}$ مصفوفتين متساويتين Equal فقط إذا كانت المصفوفتان أ، ψ طيا نفس الترتيب وكان كل عنصر في أحدهما يساوى العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى

(١ ـ ٣ ـ ٤) تعريف: المصغوفة الصغرية ٢ ـ ٢ ـ ١

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عناصرها أصفار.

(ه ـ ٣ ـ ١) جمع المصفوفات Summation

إذا كانت لدينا المصفوفتان أ = $\{i_n\}$ 6 p = $\{-p_n\}$ وهميا نفس الترتيب i_n خين غيان مجموع هاتين المصفوفتين (أو الفرق بينها) يمكن أن يعرف على أنه مصفوفة جديدة: p = p بنفس الترتيب i_n i_n وكل عنصر من عناصرها هو حاصل جمع (أو طرح) العنصرين المتناظرين في المصفوفتين أ 6 p أي أن جرو = i_n i_n i_n

مثال ١:

إذا كان لدينا المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} -\alpha \dot{x} & 1 & \gamma \\ -\alpha \dot{x} & \gamma & \gamma \\ 1 & 1 & \gamma \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} \gamma & 1 & \beta & 0 \\ \gamma & \gamma & \alpha \dot{x} \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} = 1$$

فإن

إن ضرب المصفوفة أ بـالثابت ث يعني ضرب كـل عنصر من عنــاصرهــا بهــذا

الثابت، أي أن

(٧-٣-١) خرب المصفوفات

إذا كانت المصفوفتان أ = {أرو} ك ب = {برو} قابلتين للضرب (عدد الأعمدة في المصفوفة الأانية) ورمزنا لمصفوفة حاصل فربها بالرمز ج = {جرو} فإن كل عنصر من عناصر ج عبارة عن حاصل ضرب الصفوفة والعمود المقابلين لهذا العنصر بنفس الترتيب في المصفوفين أ ك ب.

مثال ۲:

إذا كان لدينا المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ Y & Y \\ V & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & Y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & Y & 0 \end{bmatrix}$$

فإن عدد الأعمدة في المصفوفة أ = عدد الصفوف في المصفوفة ب وبالتالي فإن:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & T \\ & & 1 \\ & & T \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 1 \\ T & T \\ & & & T \\ & & & V \end{bmatrix} =$$

وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفتان أ = $\{|_{l,c}\}$ من الترتيب ن، × ن، 6 ب = $\{-,_{c}\}$ من الترتيب ن، × ن، فإن الحد العام لحاصل ضرب المصفوفتين أ 6 ب هـ $\{-,_{c}\}$ من الترتيب ن، × ن، $\{-,_{c}\}$

وإذا كانت المصفوفتان أ 6 ب مربعتين ومن نفس الترتيب فإن أ ب = ب أ

وإذا كانت المصفوفات أ ٤ ب ٤ جـ قابلة للجمع والضرب فإن

وإذا كانت المصفوفتان أ =
$$\{i_{i_0}\}$$
 من الترتيب ن، \times ن

فإنه من الممكن تجزئة كل منها إلى مصفوفات جزئية قبل إجراء عملية الضرب

ثم تتم عملية الضرب بين المصفوفتين بنفس الطريقة السابقة حيث تعتبر المصفوفات الجزئية عناصر لهذه المصفوفات.

(٨ - ٣ - ١) بعض أنواع المصفوفات

1 _ مصفوفة الوحدة The Identity Matrix

تعرف مصفوفة الوحدة على إنها مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار فيها عدا العناصر على القطر الرئيسي حيث يساوي كل منها الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز آ

صفر	صفر	صقر	١٦	
إصقر	صفر	1	صفر	= 1
صفر			صفر	
L١	صغر ٠٠٠٠٠٠٠٠	صفر	_صفر	

وتتصف مصفوفة الوحدة بعدد من الخصائص أهمها:

 إذا جمعنا مصفوفة الوحدة انهن ك مرة فإننا نحصل على مصفوفة جديدة جميع عناصرها أصفار فيها عدا العناصر على القطر الرئيسي حيث يساوي كل منها ك وتسمى بالمصفوفة القياسية

ب _ إذا ضربنا مصفوفة الوحدة آنهن ك مرة فإننا نحصل على مصفوفة أنهن

إذا ضربنا مصفوفة الوحدة إنهن بمصفوفة أخرى أنهم فإننا نحصل على المصفوفة نفسها أربيه أي أ x = أ

Commutative Matrices

٢ ـ المهفوفات التبادلية

يقال أن المصفوفتين المربعتين تبادليتان إذا كان

10=01

ومن الواضح أن كل مصفوفة مربعة هي مصفوفة تبادلية مع نفسها ومع مصفوفة الوحدة.

٣ ـ مقاوب المصفوقة The Inverse of a Matrix

يقال بأن المصفوفة أهى مقلوب المصفوفة ب إذا كان

أ - ا - ا I = ا

وإذا كانت المصفوفتان أ ٤ ب من نفس الترتيب ومقلوباهما أ^{سما} ٤ ب⁻¹ فإن رأ بـ الله عنا × سـ-ا

1 _ تحوير المصفونة The Transpose of a Matrix

إذا كان لدينا المعقوفة أ من الترتيب ن، × ن، فإننا نحصل على تحوير هذه المعقوفة بتحويل صفوفها إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف بحيث أن العنصر أرو في المعقوفة الأصلية يصبح أرو في تحوير المصفوفة، ونشير إلى مصفوفة التحوير بدأً بحث أن

مثال ۳:

إذا كان لدينا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} r & r & 1 \\ r & r & 0 \\ 1 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & r \\ r & r & 0 \\ r & r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & r \\ r & r & r \\ r & r & r \end{bmatrix}$$

إذا كان أ' كم ب' هما تحويرا المصفوفتين أ كم ب وكـان لدينــا الثابت ث فـإن من

خصائص التحوير أن

ه ـ المفوقات التياثلة Symmetric Matrices

نقول بأن المصفوفة أهى مصفوفة متماثلة إذا كان

i = 'i

وإذا كانت أ مصفوفة متهائلة فإن ث أ هي أيضاً مصفوفة مشهائلة حيث ث ثابت اختياري.

(۱ ـ ۳ ـ ۹) المحددات Determinants

Determinants 2 x 2

١ _ المحدّدات من الترتيب ٢ × ٢

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة أ من الترتيب ٢ × ٢ فيإن محدّد هـذه المصفوفة والذي يشار إليه بالرمز [أ] يمكن حساب قيمته كها يلي:

$${}^{1}\lambda_{1}^{1}\lambda_{1}^{1} - {}^{1}\lambda_{1}^{1} = \begin{bmatrix} {}^{1}\lambda_{1}^{1} & {}^{1}\lambda_{1}^{1} \\ {}^{1}\lambda_{1}^{1} & {}^{1}\lambda_{1}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \chi \\ {}^{1}\lambda_{1}^{1} & {}^{1}\lambda_{1}^{1} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{2}\lambda_{1}^{1} \end{Bmatrix}$$

مثال ٤:

إذا كان لدينا الممفوفة

٢ _ المحددات من الترتيب ٣ × ٣ فيا فوق

الطريقة الأولى:

إذا كانت المصفوفة أ من الترتيب ٣ × ٣ فإن محدد هذه المصفوفة بمكن الحصول عليه كها يلي

أ _ يتم وضع المحدد مكرراً كها هو مبين أدناه

ب _ نقوم بإجراء عملية الضرب كما يلي

جـ يتم تحديد الإشارات كها هو مبين على الأسهم في المحدد المكرر أعلاه

الطريقة الثانية:

يمكن الحصول على قيمة محدد المصفوفة أ بفك المحدد باستخدام أحد الصفوف أو أحد الأعمدة كما يلي:

- أ ـ ناخذ العنصر في الصف (أو العمود) ونضربه في المحدد المتبقي بعد حذف جميع العناصر الواقعة على الصف والعمود اللذين يحتويان ذلك العنصر.
- ب_ نكرر ذلك بالنسبة لجميع العناصر في الصف (أو العمود) الذي نقوم بفك المحدد عليه.
- جـ يتم تحديد الإشارة قبل هـنم العناصر بجمع ترتيب الصف وترتيب العمود
 اللذين يقع عليهم ذلك العنصر، فإذا كان المجموع زوجياً كانت الإشارة موجبة
 وإذا كان المجموع فردياً كانت الإشارة سالبة.
- د _ يجري فك المحددات من الترتيب ٢ × ٢، التي يتم الحصول عليها، بالطريقة التي سبق الإشارة إليها، وتسمى المحددات التي يتم الحصول عليها بفك المحددات من الدرجة الثالثة بالمحيدات أو المحددات الصغرى third order determinants

$$\begin{bmatrix} v_{i} & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i} & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i} & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i} & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ v_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i} & v_{i} \\ \vdots & v_{i} \end{bmatrix}$$

= 1,, (1,, 1,, -1,, 1,, -1,, (1,, 1,, -1,, 1,,) + 1,, (1,, 1,, -1,, 1,,)

منال ه -

إذا كان لدينا المحدد

فإن قيمة هذا المحدد بالطريقة الأولى



|i| = ۱ × ۲ × ۲ + ۲ × ۵ × ۲ + ۶ × صفر × ۳ – ۱ × ۵ × ۳ – ۳ × صفر × ۲

Y0 =

وبالطريقة الثانية

$$= 1 \times (7 \times 7 - 7 \times 6) - \omega i_{\zeta} + 3 \times (7 \times 6 - 3 \times 7) = 1$$

$$= (\land - \land \circ) + 3 (\circ / - \land) =$$

ملاحظة: إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة يحتوي على أصفار فإن من الأسهل فك المحدد باستخدام الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار.

The Minor and the Co-factor

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة أ من الدرجة ن والتي محدها [أ| فإن المحدد

الباقي بعد حذف العمود والصف اللذين بجتوبان على العنصر أبر يسمى بالمحدد الأول (أو الأصغر) للعنصر أ. ويومز له إس. أ. وعليه فإن

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} & \dot{\tau}^{\dagger} & \dots & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} \\ \dot{\sigma} & \dot{\tau}^{\dagger} & \dots & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\tau} & \dot{\tau}^{\dagger} & \dots & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} & \ddots & \dot{\tau}^{\dagger} \\ \dot{\sigma} & \dot{\tau}^{\dagger} & \dots & \dot{\tau}^{\tau}^{\dagger} & \ddots & \dot{\tau}^{\dagger} \end{bmatrix} = \dot{\tau}$$

وإذا أضفنا إلى هذا المحدد الجديد إشارة تعتمد على مجموع ترتيب الصف والعمود اللذين يقع فيهما العنصر أرر (إذا كان (ر + و) زوجياً كانت الإشارة موجبة وإذا كان فردياً كانت الإشارة سالبة) حصلنا على ما يسمى بمرافق العنصر أرر.

إذا كان لدينا المصفوفة أ ومحدها

The Rank of a Matrix

(١١ - ٣ - ١) رتبة المصفوفة

تعرف المصفوفة غير الصفرية بأنها من الرتبة ر إذا كان هنالك على الأقل واحد من محدداتها الصغرى من الدرجة ر (r-square minors) لا يساوي صفراً على أن يكون كل محدد من محدداتها الصغرى من الدرجة ر + ١ (إن وجد) يساوي صفراً.

مثال ٧:

إذا كان لدينا الممفوفة

فإن هذه المصفوفة من الرتبة ٢ حيث أن محدد العنصم أرر ≠ صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & &$$

(١٢ ـ ٣ ـ ١) المصفوفة المعزولة وغير المعزولة

Singular and Non-singular Matrix

(١٣ ـ ٣ ـ ١) المصفوفة المجاورة لمصفوفة مربعة

The Adjoint of a Square Matrix

تعرف المصفوفة المجاورة للمصفوفة المربعة أ بـأنها مصفوفـة المرافقـات لعناصر المصفوفة أ بعد تحويرها.

مثبال ۸:

إذا كانت لدينا المصفوفة

فإننا نحصل على المصفوفة المجاورة لهذه المصفوفة كما يلي:

١ _ نقوم بحساب المرافقات لعناصر المصفوفة أ:

$$A_{1/2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \times A_{1/2} \times A_{1/2} = A_{1/2} \times A_$$

ا - ١٥ - ٥ - ١٥ م - ١٥ م - ١٥ م - ١٥ م م المصفوفة العباصر فتحصل على المصفوفة

٢ .. نقوم بتحوير مصفوفة المرافقات للحصول على المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ:

The Inverse of a Matrix

(١٤١ - ٣ - ١١) مقلوب المصفوفة

يعرف مقلوب المصفوفة أ (كما أشرنا في ٨ ـ ٣ ـ ١) على أنه المصفوفة التي إذا ضربت بالمصفوفة الأصلية أ أنتجت مصفوفة الوحدة، ويرمز لها بالرمز أساحيث أ × I= 1-1

هذا ويعتبر مقلوب المصفوفة وحيداً Unique، كيا أنه لا يكون للمصفوفة المربعة أ مقلوب إلا إذا كانت غير معزولة (أ أ ا ت صفر).

يمكن حساب مقلوب المصفوفة المربعة وغير المعزولة أ بعدة طرق نشبر هنا إلى طريقة واحدة منها وهي طريقة المصفوفة المجاورة.

لحساب مقلوب المصفوفة أ بطريقة المصفوفة المجاورة نتبع الخطوات التالية:

- ١ ـ نقوم بحساب قيمة عدد المفوفة أ
- ٢ _ نقوم بحساب المرافقات Co-factors لكل عنصر من عناصر المصفوفة أثم نقوم بتحوير هذه المصفوفة للحصول على المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ.
- ٣ ـ نقوم بقسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المجاورة للمصفوفة أعلى محدد المصفوفة أ ونحصل على مقلوب المصفوفة.

مشال ٥:

إذا كان لدينا المصفوفة:

فإنه يمكن حساب مقلوبها باتباع الخطوات السابقة كما يلي:

$$Y = \begin{bmatrix} Y & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \times Y = \begin{bmatrix} -\alpha \dot{\alpha} & Y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = |I|$$

أي أن المصفوفة أغير معزولة ولها مقلوب:

٣ ـ المصفوفة المجاورة:

عنصر من عناصر المصفوفة المجاورة للمصفوفة أعلى محدد المصفوفة أ

نحصل على مقلوب المصفوفة أ:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{7} & \frac{7}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{7}{7} & \frac{7}{7} & \frac{7}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \end{bmatrix} = \frac{0.66}{1}$$

أسئلة وتمارين (١)

١ ـ أي من الآتية صحيح وأي منها خطأ:

٢ _ أوجد الفئات التالية:

(٢ ـ ١) إذا كانت الفئة الشاملة ف تشتمل على جميع الأعـداد الصحيحة المـوجبة .

١ _ أوحد الفئات التالية:

٢ _ حقة العلاقات التالية باستخدام أشكال فن:

(٣- ١) الجدول التالي يبين توزيع ١٠٠٠ عامل في إحدى الشركـات حسب الجن

غير مدرّب)	(مدرّب)	التدريب	ومستوى	إناث	(ذکور،
حير مدرب	رسرب		0))		-,

المجمسوع	غير مدرّب	مسدرب	مستوى التدريب
			الجنس
V • •	7	0 * *	ذكــور
4.00	10.	10.	إنساث
1	* 0 •	70.	المجمسوع

إذا رمزما لفئة الذكور بالرمز ذ ولفئة المدرّبين بالرمز م، أوجد الفئات التـاليـة واعط تفسيراً لكل منها:

ذ ١١م ٤ ق ١١م ٤ ذ ١١ م ٤ ق ١١ م

- (٤ ١) تقسم إحدى الشركات إلى ثلاث إدارات رئيسية عدد الموظفين الكبار في كل منها هو ٤ ك ٢ ك ٣ على الترتيب. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من كبار الموظفين بحيث بمثل كل إدارة من هذه الإدارات موظف واحد فقط.
- (٠- ٢) تقدم ٢٠ شخصاً في مسابقة ما بالإجابات الصحيحة للتنافس على أربع جوائز 6 فبكم طريقة يمكن اختيار أربعة متسابقين من بين المتقدمين بالإجابات الصحيحة لمنحهم الجوائز المخصصة فذه المسابقة.
- ۱۱ إذا كمان لدينا مجموعة مكونة من ٨ رجال، ٦ نساء، ١٠ أطفال، فبكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث رجال وثلاث نساء وستة أطفال.
 - (٧ ـ ١) كيس به ٦ كرات بيضاء، ٨ كرات خضراء، ٤ كرات سوداء،
- ۱ بكم طريقة يمكن سحب مجموعة مكنونة من ٣ كنرات بيضاء، ٢ كنرة سوداء، ١ كرة خضراء.
- ٢ بكم طريقة يمكن سحب مجموعة مكونة من ٤ كرات بشرط أن لا يقل
 عدد الكرات البيضاء في هذه المجموعة عن ٣.
 (ملاحظة: السحب بدون إعادة).
 - (٨ ـ ١) أوجد مفكوك كل من المقادير التالية باستخدام نظرية ذات الحدين:
 ١ ـ (٢ س + ص)⁰

(٩ ـ ١) أوجد الحد الخامس في مفكوك المقدار:

(١٠ - ١) أجر العمليات التالية:

(١١ ـ ١) إذا كانت لدينا المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & 1 \\ \xi & \gamma & \cdot \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \xi & \gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

أوجد ما يلي (إذا كان ذلك ممكناً).

الباب الثاني

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها Probability Theory and its Applications

مقدمة Introduction

تعتبر نظرية الإحتمالات إحـدى الأدوات الإحصائيـة الأساسيـة التي تستخدم في تقييم الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من بيانات العينة.

وكلمة يحتمل أو مشتقاتها شائعة الإستعمال في حياتنا اليومية. فعنلاً نقول: يحتمل أن يكون الطفس لطيفاً هذا اليوم، أو يحتمل أن يصادف الكتاب الجديد نجاحاً كبيراً، أو يحتمل أن ينجع التلميذ في الإمتحان. وتختلف درجة الثقة في وقوع الحادث من حالة إلى أخرى ولكن يمكن القول بأننا لا نصدر أحكاماً في جميع الأحوال، وإنما نشير إلى نتائج متوقعة لتجارب افتراضية Conceptual Experiments ومع مرور الزمن اكتسبت هذه الألفاظ معان علمية إحصائية سوف نشير إليها أثناء دراستنا خذه النظرية واستخداماتها في ميادين الإستدلال الإحصائي.

وقد بدأ تطور هذا العلم في القرن السابع عشر من خملال ألعاب الرهان والمقامة والتي تعتمد نتائجها على عنصر المصادقة، إذ لجناً كثير من المقامرين إلى علماء الرياضيات من أمثال باسكال B.Pascal وبرنوللي ال. Bernoulli ل من أجل تحسين فرصهم في الحصول على الربح. ولكن الفهم الإحصائي أو التجريبي للإحتمالات تبلور من خملال أعمال فيشر R.A. Fisher وفون مايسز R von Mises حيث أوجد الاختمالات مبنى على نظرية القياس Sample Space على وضع إطار رياضي لنظرية الإحتمالات مبنى على نظرية القياس Measure Theory.



الفصل الأول

بعض التعاريف والنظريات الأساسية

Fundamental Definitions and Theorems

(۱ - ۱ - ۲) تماریف:

۱ ـ الحادث Event والتجربة Event

عند رمي قطعة نقود فإننا نحصل على صورة Head أو كتابة Tail, ورمي قطعة النقود يسمى تجربة وظهور أحد الوجهين يسمى حادث. ولمعرفة مدى مطابقة الوحدات المنتجة في مصنع للمواصفات المطلوبة فإننا نختار عينة من إنتاج هذا المصنع ونفحصها، وعملية اختيار العينة يسمى تجربة وكون الوحدة معيبة أو غير معيبة يسمى حادث.

۲ _ النتائج المكنة Possible Outcomes

وهي جميع النتائج أو الحالات التي تظهر نتيجة إجراء تجمرية. فإذا رمينا قـطعة نقود فإن النتائج الممكنة هي صورة أو كتابة، وإذا كان عدد أفـراد الأسرة في مدينـة ما يتراوح بين ٢ و ١٥ واخترنا أسرة بشكل عشوائي فإن عدد أفـراد هذه الأسرة بمكن أن يكون ٢ أو ٣ أو أو ١٥.

۳ _ النتائج المواتية Favourable Outcomes

وهي النتائج التي تحقق الحادث الذي نـــدرس احتيال وقــوعه، فــإذا رمينا زهــرة طاولة وكان الحادث الذي ندرس احتيال وقوعه هو رقم زوجي فإن النتائج المواتية هي ٢ ٤ ٤ ٦ ، وإذا رمينا زهـرتي طاولة معاً وكان الحادث الذي ندرس إحتيال وقوعه هو بجموع ٥ على الزهـرتين معاً فإن النتائج المواتية هي (١ ك ٤) ك (٤ ك ٢) ك (٢ ك ٣) ك (٣ ك ٢) من بين ٣٦ جالة مكنة.

إ ـ التائج التائج المائلة Equally Likely Outcomes

وهي النتائج التي تكون احتيالات حدوثها متساوية، فإذا رمينا بدون تحيز زهرة طاولة كاملة التوازن فإن هذا يعني أن الظروف المهيئة للحصول على أحد الأوجه الستة عائل الظروف المهيئة للحصول على الأوجه الاخرى ولا يوجد أي سبب لترجيح ظهور أي منها على الاخرى وفي هذه الحالة فإن الأوجه الستة لزهرة الطاولة تسمى نتائج متائلة.

Probability Definition

(٢ - ١ - ٢) تعريف الإحتيال

يمكن تعريف الإحتمال بطريقتين:

إذا كان الحادث أ يحدث م مرة من مجمـوع ن مرةٌ، وكـانت نتائـج هذه المـرات متهائلة فإن إحتيال وقوع الحادث أ ٤ ح (أ) ٤ هو

$$(1-1-1)$$
 عدد النتائج المواتية للحادث أ $\frac{1}{2}$ عدد النتائج المحكنة $\frac{1}{2}$

فإذا رمينا زهرة طاولة فإن إحتمال الحصول على رقم ١ هو

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T}$$

واحتيال الحصول على رقم زوجي هو

$$\int_{\gamma} (\gamma) (\gamma) (\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

ويواجه استخدام هذا التعريف في الحياة العملية صعوبات أهمها:

أ ـ صعوبة توفر الصفات متنافية أو متهاثلة في الحوادث التي ندرس إحتهال وقوعها.
 ب ـ صعوبة التوصل إلى إجابة إذا كان عدد النتائج المكنة لا نهائي.

جــ صعوبة الإجابة على بعض الأسئلة مثل:

ما هو احتمال أن يكون المولود ذكراً؟ ...

ما هو احتمال أن يحترق المصباح الكهربائي قبل أن يصل عمر ١٠٠٠ ساعة؟ ما هو احتمال أن يموت رجل عمره ٢٠ عاماً قبل أن يصل إلى سن الخمسين؟ والاحتمالات المعرفة بالطريقة التقليدية تسمى الإحتمالات القبلية.

وسوف نعود لدراسة هذا النوع من الإحتيالات آثناء عرضنا لنظرية بيز.

تصریف الاحتیال بالتکرار النسي Probability by Rela- تصریف الاحتیال بالتکرار النسي tive Frequency

إذا كررت تجربة ما تحت نفس الظروف ن من المرات وكان عدد النتائج المـواتية لحادث معين أ هو م مرة فإن التكرار النسبي للحادث أ هو

$$(1-1-7)$$
 (i) = (i) - 2 - (i) = (i) - (i) - (i) = (i) - (i) = (i

فمثلا إذا رمينا قطعة نقود ١٠٠ مرة وظهـرت الصورة في ٤٠ رميـة منها، فــإن التكرار النسبي هذا الحادث هو

وإذا كانت قطعة النقود كاملة التوازن والرامي غير متحيز فإن

وإذا أردنا معرفة نسبة الوحدات غير المطابقة للمواصفات المطلوبة (معيبة) في إنتاج آلة معينة وأخذنا عينة من إنتاج هذه الآلة حجمها ن وفحصنا هذه العينة ووجدنا أن عدد الوحدات المعيية هو م فإن:

التكرار النسبي للوحدات المعيبة =
$$\frac{9}{i}$$

وتعريف الإحتيال بالتكرار النسبي تعريف إحصائي ويسمى أيضاً الإحتيال المقدّر -Es timated Probability أو الإحتيال التجريبي . Empirical Probability

(٢-١-٣) قوانين جمع وضرب الإحتيالات Laws of Probability

للإلمام بقوانين جمع وضرب الإحتمالات فإنه يلزم فهم واستيعاب التعاريف التالة:

۱ ـ الحوادث المتنافية Mutually Exclusive Events

بقال أن الحادثين أ. ٤ أب متنافيان إذا استحال حدوثهما معاً. فعند رمي قطعة

نقود فإنـه من المحال الحصــول على صــورة وكتابـة في نفس الوقت، وعنــد رمي زهرة طاولة فإنه لا يمكن الحصــول على وجهين معاً.

Exhaustive Events

٢ _ الحوادث الشاملة

تسمى الحوادث أم 6 أم 6 . . . 6 أن حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لا بدّ من حدوث أحدها عند إجراء التجربة ، فالوجوه التي عليها الأرقام ١ 6 ٢ 6 ٢ 6 ٢ 6 ٤ 6 ٥ 6 7 في زهر الطاولة تعتبر حوادث شاملة .

Conditional Probability

٣ - الإحتيال الشرطي

إذا اعتبرنا مجموعة من أوراق اللعب وسحبنا ورقة منها دون النظر إليها فإن إحتال أن تحمل هذه الورقة رقم ٧ إذا علمنا من شخص آخر ينظر إليها أنها ديناري هو ١٠٠٠ فإذا رمزنا لحادث سحب ورقة تحمل الرقم ٧ بالرمز أ، وحادث سحب ورقة ديناري بالرمز أ، فإنه يمكن التعبير عن الإحتيال الشرطي السابق بالرموز على النحو النالى:

ويقرأ الطرف الأيمن من هذا التعبير إحتيال وقوع الحادث أ، إذا علم أن الحادث أ, قد وقم.

Independent Events

٤ ـ الحوادث المستقلة

يقال أن الحادثين أ, ك أ, مستقلان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعــه لا يؤثر على وقوع الأخر، وفي هذه الحالة فإن

$$\begin{bmatrix}
(i, / i_f) = \zeta(i_f) \\
\zeta(i_f / i_f) = \zeta(i_f)
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
(7 - 1 - 7) \\
\zeta(i_f / i_f) = \zeta(i_f)
\end{bmatrix}$$

Addition of Probabilities

أولاً قانون جمع الاحتيالات

إذا كان أ، ٤ أ، حادثين مختلفين فإن

$$(7-1-1) = (7^{i} \cap i) - (7^{i}) - (7^{i}) = (7^{i} \cup i) - (7^{i}) - (7^{i}$$

وإذا كانت أ. 6 أ. 6 أ. ثلاث حوادث مختلفة فإن:

$$\frac{1}{2} (\hat{i}_{1} \cup \hat{i}_{2} \cup \hat{i}_{3}) = \frac{1}{2} (\hat{i}_{1}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{3}) - \frac{1}{2} (\hat{i}_{1} \cap \hat{i}_{2}) - \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3}) - \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{1} \cap \hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{i}_{3}) + \frac{1}{2} (\hat{i}_{2} \cap \hat{i}_{3} \cap \hat{$$

ويمكن تعميم هذا القانون على أكثر من ثلاث حوادث.

إذا كمان أ. 4 أ. حادثين متنافيين فإن ح (أ. ∩ أ.) = صفر وتؤول المعادلة (٤- ١ - ٢) إلى

$$(I_{-}, U_{1}) = (i_{1}) + (i_{2})$$

وإذا كانت أ، كم أ، كم أ، حوادث متنافية فإن ح (أ، \bigcap أ،) يصفر ك ح (أ، \bigcap أ،) = صفر . ح (أ، \bigcap أ، \bigcap أ،) = صفر ك ح (أ، \bigcap أ، \bigcap أ،) = صفر وتؤول المعادلة (د ـ 1 ـ

Y)
$$\frac{1}{2}$$
 $\int (\hat{i}_{1} \cup \hat{i}_{2} \cup \hat{i}_{3}) = \int (\hat{i}_{1}) + \int (\hat{i}_{2}) + \int (\hat{i}_{3}) + \int (\hat{i}_{2}) + \int (\hat{i}_{3}) +$

وبشكل عام إذا كانت أ، 6 أ، 6 . . . 6 أن حوادث متنافية فإن:

أي أن إحتمال المجموع يساوي مجموع الإحتمالات، ويسمى هذا قانون جمع الاحتمالات.

نتائج

نتيجة (١)

نتيجة (٢)

ح (۱، ۵ ۱، ۵ ۰۰۰

(7 - 1 - 9)

نتيجة (٣)

إذا كانت أرى أم ى ك أن حوادث شاملة ومتنافية ومتهاثلة فإن

$$(i_1) = (i_1) = \dots = (i_n) = \dots$$

$$\frac{1}{i_n} = (i_n) = \dots = (i_n) = \dots$$

$$\frac{1}{i_n} = (i_n) = (i_n$$

إذا رمزنا لحادث معين بالرمز أ وعدمه بالىرمز أ فيان أ تسمى الحادث المكمل Complementary Event والحادثين أ كم أ شاملان ومتنافيان. أي أن

$$(i \cup i) = (i) + (i) = (i \cup i)$$

Multiplication of Probabilities

إذا كان لدينا حادثان أ, ك أ, فإن إحتمال وقوعهما معاً ح (أ, ∩ أ,) يكتب عملي

النحو التالي : ح (أر ∩ أم) = ح (أر) ح (أم / أر)

وإذا كان أ، 6 أ. حادثين مستقلين فإن

ثانيا قانون ضرب الاحتيالات

وبشكل عام إذا كانت أ. 6 أ. 6 أن مجموعة من الحوادث المستقلة فإن

أي أن احتمال حاصل الضرب يساوي حاصل ضرب الإحتمالات، ويسمى هذا قانون ض ب الاحتمالات.

تمارين محلولة (مجموعة ١ ـ ٢):

غرين (١)

إذا رمينا زهرة طاولة، ما هو إحتيال الحصول على رقم يقبل القسمة على ٣؟

الحسل:

الأرقام التي تقسل القسمة على ٣ في زهرة الطاولة هي ٢ 6 ٦ 6 وحيث أن النتائج المكنة عددها ٦، فإن

المحدة عدده ، والمحدول على ٣ أو ٦) =
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

غرين (٢):

إذا رمينا زهرتي طاولة معاً. ما هو احتمال الحصول على مجموع ٣٦.

الحسل

الحصول على مجموع ٦ معناه الحصول على (١ 6 ٥) أو (٥ 6 ١) أو (٢ 6 ٤) أو (٤ 6 ٢) أو (٣ 6 ٣) وعدد هذه النتائج ٥. وبما أن عدد النتائج المواتية هو ٣٦ فإن ح (الحصول على مجموع ٦) = -

غرين (٣):

إذا علم أن احتمال وجود عيب في النسيج الذي يستخدمه مصنع للقمصان هـ و ٥/ واحتيال وجود عيب فيه ناشيء من الصباغة هو ٤/. فإذا كانت العمليتان الانتاجيتان مستقلتين، أوجد احتمال انتاج قميص معيب (أي به عيب أو أكثر من العيوب المذكورة).

الحيل:

إذا رمزنا لحادث وجود عيب في النسيج بالرمز أ, وحادث وجود عيب نـاتج عن الصباغة بالرمز أد، فإنه باستخدام المعادلتين (٤ - ١ - ٢) 6 (٢ - ١ - ٢) - 29 -

نجد أن

غرين (٤):

إذا كانت التقديرات التالية لدى مدير التخطيط في مصنع معين:

- ـ احتمال أن يتم استلام المعدات اللازمة لمشروع معين في الموعد المتفق عليه = ٨٠٪
 - ـ احتمال أن ينتهي العمل في المشروع في موعده المحدد = ٦٤٪
- احتيال أن يتم استلام المعدات اللازمة للمشروع في الموعد المتفق عليه وأن ينتهي
 العمل في المشروع في موعده المحدد = ٢٠٪.

واعتهاداً على التقديرات السابقة، المطلوب تحديد:

- ١ ـ احتمال انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا سلّمت المعدات في الموعد
 المتفق عليه.
- ٢ ـ احتمال عدم انتهاء العمل في المشروع في صوعده المحدد إذا لم تسلم المعدات في
 الموعد المتفق عليه.

: الحسل:

إذا زمزنا لحادث استلام المعدات اللازمة للمشروع بالرمز أ, والحادث المكمل له بالرمز أ, وحادث انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد بـالرمز أ, والحادث المكمار له بالرمز أو فإن:

١ ـ احتمال إنتهاء العمل في المشروع في موحده المحدد إذا سلّمت المعدّات في الموحد
 المتفق عليه ح (أبر/ أ،) يحسب باستخدام (١٣ ـ ١ ـ ٢) على النحو التالي:

$$\int (|f_1 \setminus f_2|) = \frac{\int (|f_1 \cap f_2|)}{\int (|f_1 \cap f_2|)} = \int (|f_1 \cap f_2|) = \int (|f_1$$

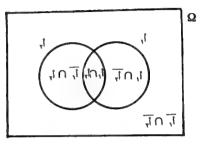
٢ - احتمال عدم انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا لم تسلّم المعدات في الموعد المتفق عليه (ح (آ / ۱)) باستخدام (۱۳ ـ ۱ ـ ۲) كما يلي:

$$\frac{1}{2\sqrt{l_{\gamma}}}\sqrt{l_{\gamma}} = \frac{1}{2\sqrt{l_{\gamma}}}$$

حيث:

-1

أماح (١١٦) فيمكن حسابه باستخدام أشكال فين كها يلي



(شکل (۱ - ۱ - ۳)

حيث Ω ترمز لفراغ المعاينة Sampling Space

من المعلوم أن:

غرين (٥):

في دراسة عن الإنفاق الاستهلاكي على السجاير للسكان البالغين في مدينة معينة أمكن الحصول على المعلومات التالية:

	ذكسور	إنسات	
صفر (لا يدخن)	1	£ * * *	
دينار وأقل من ثلاثة	****	****	
ثلاثة دنانير وأقل من خمسة	0 * * *	7	
خمسة دنانير فأكثر	Y	1	
المجمسوع	1	1 * * * *	

إذا اخترنا مفردة (ذكر أو أنثى) عشوائياً من بين الذين شملتهم الدراسة:

١ ـ ما احتمال أن تكون هذه المفردة ممن يدخنون؟

٢ .. إذا علمنا أن هذه المفردة بمن يدخنون، ما احتيال أن تكون من الذكور؟

٣- إذا علمنا أن هذه المفردة من الإناث، ما احتيال أن تكون ممن ينفق خمسة دنمانير
 فأكثر شهريًا على السجاير؟

إذا علمنا أن هذه المفردة من الإناث المدخنات، ما احتيال أن تكون عن ينفقن
 ثلاثة دنانبر فأكثر شهرياً على السجاير؟

الحسل:

إذا رمزنا لحادث أن تكون المفردة المختارة عشوائياً من المدخنين بالرمر أم ولحادث أن تكون من المذكور بالرمز أم ولحادث أن تكون من الإناث بالرمز أم ولحادث أن تكون عن ينفقن خسة دنانير فأكثر شهرياً على السجاير بالرمز أع ولحادث أن تكون من الإناث المدخنات بالرمز أه ولحادث أن تكون عمن ينفقن ثلاثة دنانير فأكثر شهريا على السجاير بالرمز أم فإن:

۲ ـ بتطبیق (۱۳ ـ ۱ ـ ۲):

تمرين (٦): الجدول التالي بينّ التقديرات التي حصل عليها ٢٠٠ طالب في اختبارين:

المجموع	جيد جدأ	جيد	مقبول	ضعيف	الاختبار الأول الاختبار الثاني
١٠			٦	٤	ضعيف
۸۰	۲	١٤	٥٤	١٠	مقبــول
٧٠	٤	٤٠	٧٠	٦	جيد
٤٠	18	17	١.		جيد جداً
٧٠٠	۲۰	٧٠	9.	4.	المجمسوع

فإذا اخترنا عشوائياً أحد طلبة هذه المجموعة، أوجد:

١ ـ احتمال أن يكون تُقديره في الاختبار الثاني هو مقبول.

٢ ـ احتمال أن يكون تقديره في الاختبار الثماني هو مقبول إذا علم أن تقديره في
 الاختبار الأول مقبول.

- ٣_ احتيال أن يكون الطالب قد حصل على نفس التقدير في الاختبارين.
- ٤ احتمال أن يكون قد نجع في الاختبار الثاني علماً بأنه كان راسباً في الاختبار الأول.
- ه ـ احتيال أن يكون تقدير الطالب في الاختبار الثناني أعلى من تقديره في الاختبار الأول.
 - ٦ _ احتيال أن يكون قد حصّل تقدير جيد جداً في واحد على الأقل من الاختبارين.

الحسل:

 إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هو مقبول بالرمز أ فإنه باستخدام (١ ـ ١ ـ ٣)

إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هـو مقبول بالرمز
 أر، وحـادث الحصول عـلى طالب تقـديره في الاختبـار الأول هـو مقبـول.بالـرمز
 أب فإنه باستخدام (١٣ ـ ١ ـ ٢)

$$\int_{\gamma} (l_r \setminus l_y) = \frac{30}{100} \div \frac{9}{100} = \frac{30}{100} = 97,$$

٣_ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو ضعيف بالرمز أ، وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو مقبول بالرمز أ، وحادث الحصول الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو جيد بالرمز أ، وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو جيد جداً بالرمز أ، وحيث أن أ، أ، أ، أم، عوادث متنافية فإنه باستخدام (١٥ - ١ - ٢) نجد أن:

إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب ناجع في الاختبار الثاني بالرمز أ, وحادث الحصول على طالب راسب في الاختبار الأول بالرمز أ, فإنه باستخدام
 ١٣٥ - ١ - ٢)

$$\int (l_1 \setminus l_2) = \frac{1 + l_2}{1 + l_2} \div \frac{3 + 1 + l_2}{1 + l_2} = \frac{1}{1 + l_2}$$

$$= \frac{1}{1 + l_2} = \frac{1}{1 + l$$

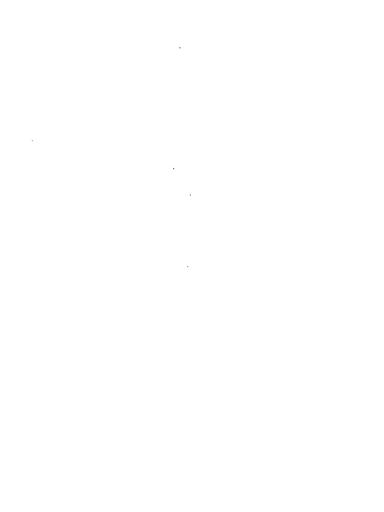
إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني أعلى من تقديره في
 الاختبار الأول بالرمز أ فإنه باستخدام (١ - ١ - ٢)

· , *1 =

إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الأول هو جيد جداً
 بالرمز أ, وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هو جيد جداً
 بالرمز أ, فإنه باستخدام (٤ - ١ - ٢)

$$\int_{\gamma} (j_{\gamma} \cup j_{\gamma}) = \frac{\gamma}{\gamma \cdot \gamma} + \frac{\gamma \cdot \gamma}{\gamma \cdot \gamma} = \frac{37}{\gamma \cdot \gamma} = \frac{73}{\gamma \cdot \gamma}$$

= ۲۳ , ۰



الفصل الثانى

نظرية بيز Bayes' Theorem

أطلق على هذه النظرية إسم بيز نسبة ألى مكتشفها العالم توماس بين Thomas والذي عاش في الفترة ١٧٦١-١٧٦١ ونشرت في بحث علمي قصير عام ١٩٦٣، وتعنى هذه النظرية أساساً بحساب الاحتيالات الشرطية وعكن وضعها بصورة جرية مسطة على النحو التالى:

إذا كان لدينا حادث ب ومجموعة من الحوادث الشاملة والمتنافية أر، أر، أر، أن وكان وقوع الحادث ب لا بد وأن يكون مصحوباً بوقوع أحد الحوادث أر، أر، بر، أن فإن ب ∩ أر، ب ∩ أر، ب ب ∩ أن حوادث متنافية ويتطبق (۸ ـ ۱ - ۱) فإن

والمطلوب الآن هو إيجاد ح (أر/ب)، وباستخدام فانون الاحتمال الشرطي (١٣ - ١ - ١) فإن

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

وباستخدام (۱۳ ـ ۱ ـ ۱) مرة أخرى والتعويض من (۱۸ ـ ۲ ـ ۲) نجد أن
$$= (l) - (l) - (l)$$
 $= (l) - ($

فإذا فرضنا أن ب تمثل مجموعة من البيانات المدانية أو التجريبية، فإن إحتال وقوع الحادث أر في ضوء هذه البيانات والذي تم الوصول إليه عن طريق نظرية بيز يسمى الاحتمال البعدي الحدث أر قبل المحتمال البعدي الحدث أر قبل اللجوء إلى هذه النظرية فإنه يسمى الاحتمال القبل Prior Probability

ومما تجدر الإشارة إليه أن هذه النظرية تعنى بالاحتيالات الشرطية من الناحية الشكلية فقط، ففي حين أن الاحتيال الشرطي بمفهومه المعتاد يعطي إحتيال الحصول على عينة ما أو نتيجة تجربة معينة إذا علمت قيمة ثابت المجتمع أو حالة الطبيعة فإن نظرية بيز تعطى إحتيال الحصول على قيمة ما لثابت المجتمع أو حالة معينة للطبيعة في ضوه بيانات العينة أو نتيجة التجربة. وسوف نوضح هذه النظرية باستخدام Diagram الذي نعرضه بعد التعرين التوضيحي التالى:

تمرين توضيحي إذا فرضنا أن مصنعاً به أربع الات تنتج من سلعة ما المقادير التالية:

וצנג	الانتاج اليومي بالوحدة
١	1
۲	17
4	/**
٤	Y
المجموع	7

وإذا فرضنا أن نسبة المعيب من إنتاج الآلات الأربع هي كيا يلي:

وجمع إنساج المصنع في نهايـة يـوم العمـل واختـيرت وحـدة من هـذا الانتـاج عشهاشاً، أوجد:

١ _ احتيال أن تكون هذه الوحدة معيبة

٢ _ إحتيال أن تكون هذه الوحدة من أنتاج الآلة الأولى إذا علم أنها معيبة.

لحل

أفرض أن: ب هو حادث الحصول على وحدة معيبة

أ, هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الثانية
 أب هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الثانية
 أب هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الثالثة

أً , هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الرابعة

وبناء على المعلومات المعطاة وبتطبيع (۱ - ۱ - ۲) فإن
$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1 \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot \cdot} = \frac{1}{1 \cdot \cdot \cdot} = \frac{1}{1 \cdot \cdot \cdot} = \frac{1}{1 \cdot \cdot \cdot}$$

$$\frac{A}{I} = \frac{A \cdot \cdot \cdot}{A \cdot \cdot \cdot} = (i_1^3) \leq \frac{A \cdot \cdot}{A} = \frac{A \cdot \cdot \cdot}{A \cdot \cdot \cdot} = (i_1^3) \leq \frac{A}{I} = \frac{A}{I$$

وبتطبيق (١٣ ـ ١ ـ ٢) وبناء على المعلومات المعطاة فإن:

وبالتعويض في (١٧ ـ ٢ ـ ٢) نجد أن

وبالتعويض في (١٩ ـ ٢ ـ ٢) فإن

ح (أ,/ب)

الفصل الثالث

شجرة القرارات Tree Diagram

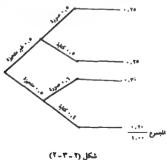
تستخدم هذه الأشكال للمساعدة في فهم وحل بعض المسائل الاحتمالية مشل نظرية بيز واتخاذ القرارات والقيمة المتوقعة. والأمثلة التالية توضع كيفية استخدام هذه الأشكال.

مثسال ۱:

إذا كان لدينا قطعنا نقود واحمدة منها غير متحيزة، والشانية متحيزة بحيث أن نسبة عدد مرات ظهور الصورة هو ٢٠,٦، واخترنا عشوائياً واحمدة من هاتمين القطعتين، وأجرينا تجربة برمي هذه القطعة، فيا هو إحتيال أن تكون القبطعة المختارة هي المتحيزة إذا حصلنا على صورة نتيجة إجراء التجربة؟

الحل

يمكن الوصول إلى الحل باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:



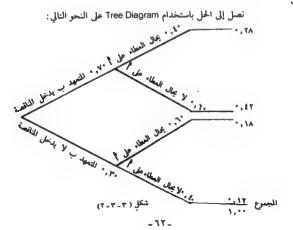
کل (۲ - ۳ -- ۱۱ -

احتمال أن تكون قطعة النقود المختارة هي المتحيزة إذا ظهرت صورة عند
 إجراء التجربة من الشكل (٧ ـ ٣ ـ ٢) وباستخدام نظرية بينر (٩ ـ ٢ ـ ٢)

مثال ۲

إذا أراد متعهد أ الدخول في مناقصة الإنشاء مشروع ودلّت الخبرة السابقة أن متعهداً آخر ب يدخل في مناقصة ٧٠٪ من المشاريع التي تماثل المشروع الحالي. وإذا لم دخل ب المناقصة فإن إحتيال أن يُعال العطاء على المتعهد أ يساوي ٤٠٪، وإذا لم يدخل ب في المناقصة فإن إحتيال أن يُعال العطاء على المتعهد أ يرتفع إلى ١٦٠٪ (حيث أن هناك دائم متعهدين آخرين يدخلون في المناقصة). فإذا دخل أ في هذه المناقصة وأحيل العطاء عليه ولم يعلم مقدماً ما إذا كان ب قد دخل فيها، فصا هو إحتيال أن يكون ب قد دخل فيها، فصا هو إحتيال أن

الحل



باحتيال أن يكون ب قد دخل في المناقصة أذا أحيل العطاء على أ من الشكل (٣-٣-٢) وياستخدام نظرية بيز (١٩- ٢- ٢)
 ح (ب دخل في المناقصة | أحيل العطاء على أ)
 ح (ب دخل في المناقصة ∩ أحيل العطاء على أ)
 ح (أحيل العطاء على أ)
 ح (أحيل العطاء على أ)
 ع (أحيل العطاء على أ)

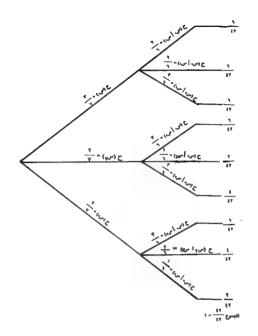
مثال ۳

يوجد سبع الات حاسبة في غزن معين، ثلاث منها صالحة، واثنتان فيهما خلل بسيط واثنتان فيهها خلل كبير. إختار شخص آلتين منها بالنتالى ويدون إعادة وأخذهما إلى المكتب، ما هو إحتيال أن تكون واحدة منها فقط فيها خلل كبير؟

الحل

سوف نرمز للآلة الصالحة بالرمز س، والآلة التي فيها خلل بسيط بالرمز س، والآلة التي فيها خلل كبير بالرمز س،

ونحسب الاحتيال المطلوب باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:



كما أنه يمكن حساب الأحتمال المطلوب باستخدام توزيع الهايـبرجيومـترك الذي ندرسه في الباب الرابع من هذا الكتاب.

مثال ٤

بائع يزور زبوناً للمرة الأولى ويبيعه صفر أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٣ وحدات من سلعة ما باحتيالات ٢٠،١، ٣٠، ٢٠، ١ على التوالي. ويقوم البائع بزيارة الزبون مرة ثانية إذا كانت مبيعاته له في المرة الأولى صفر أو ١ أو ٣. والزبون الذي يشتري وحدتين في المرة الأولى فإنه يشتري ١ أو صفر في المرة الثانية باحتيالات ٢٠،٥، ٢٠، على التوالي، والزبون الذي يشتري وحدة واحدة في المرة الاولى يشتري ٣ أو ١ أو صفر في المرة الثانية باحتيالات ٢٠،٥، ٣٠، على التوالي، وأخيراً الزبون الذي لا يشتري ٣ أو ٢ أو ١ أو صفر في المرة الثانية باحتمالات ٢٠،٥، على التوالي، وأخيراً الزبون الذي

أوجد القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد.

الحل

يمكن حساب القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:

س [×] ح (س)	ح (س)	س		الزيارة الثانية		الزيارة الأولى	خلد الوحدات
٧, ٧٠	٠,٤٠	۴		لاشيء	٠,٤=	یع ۳، ح (۲)	۴
177,+	*,17	7	٠,٤=	ييع ١، ح (١)	• , 🕆 =	ییع ۲، ح (۲)	4
٠,٢٦	•,1A	۳	٠,٦=	یبع صفر ، ح (صفر)			
	٠,٠٤	۳	· , Y =	ییع ۲ ، ح (۲)	* , Y =	ييع ١، ح (١)	1
.,17	.,.1	*	٠,٣=	ييع ١، ح (١)			
٠,١٠	.,1.	1		ييع صفر،			
			1,0=	ح (صفر)			
• , • *	.,.1	۳	٠,١=	ییج ۲، ح (۲)		ييع (صفر)،	صقو
					.,1=	ح (صفر)	
• . • £	٠,٠٢	. T	٠, ٧ =	ییج ۲ ، ح (۳)			
• , • ٣	٠,٠٣	1	۰,۴=	پیج ۱، ح (۱)			
صغر	*,**	خقر	· , £ = (یپیممغر)ح (صفر)			
Y. 4%	١,٠٠		(Y = !	شکل (۵ - ۳		المجموع	

من الشكل (٥ ـ ٣ ـ ٢) يتضع أن القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد يساوي ٢٠,٣٦.

الفصل الرابع

اتخاذ القرارات في ظروف المخاطرة Decision Making Under Risk

يعتبر اتخاذ الفرارات في ظروف المخاطرة تـطبيقاً مبـاشراً لمبـادىء الاحتمالات وتوضيحاً لفكرة القيمة المتوقعة Expected Value

وسوف نقوم بحل هذه المشكلة بالطرق التالية:

Conditional Profit Table	١ ـ جدول الأرباح المشروطة
Conditional Loss Table	١ ـ جدول الحسائر المشروطة
Marginal Analysis	۲ _ التحليل الجدى

غرين توضيحي

الجدول التكراري النسبي التالي يبينَ احتمالات الطلب على احدى السلع الموسمية.

الاحتيال أو التكرار النسبي	طلب بالوحسدة	
*,1	1	
٠, ٢	7	
۳,۰	***	
٠,٢	ξ••	
٠,٢	٥٠٠	
1,.	المجموع	

والربع المتحقق من بيع الوحدة الواحدة في الموسم يسماوي ١٠ دنانـير والحسارة في كل وحدة لا تبـاع في الموسم تســاوي ٥ دنانــير، فيا هي أفضــل خطة يتبعهــا المنتج

لتحقيق أكبر ربح ممكن في حالة المخاطرة؟ الحــــــل

المشروطة	الأرباح	جدول	أولأ
----------	---------	------	------

0	£ • •	r	Y • •	1	حالات الطلب
٠,٢	٠,٢	٠,٣	٠,٢	1,1	الاحتيال
					البدائل
1	1	1	1	1	. 1
7	****	Y	7	0	7
****	****	****	10	صفر	٣٠٠
{···	£ • • •	40	1	0 • • -	ξ··
٥٠٠٠	To	Y		1 • • • -	٥٠٠

وأي عنصر في هذه المصفوفة يمثل الربح المتحقق عند تقاطع بديل معين أو استراتيجية معينة (صف) مع مستوى معين للطلب (عمود)، فمثلاً العنصر الواقع عند تقاطع البديل ٢٠٠ (الصف الثاني) ومستوى الطلب ١٠٠ (العمود الأول) عبارة عن الربح المتحقق نتيجة بع ١٠٠ وحدة مطروحاً منه مقدار الخسارة المتحقق نتيجة بقاء ١٠٠ وحدة دون بيع في الموسم، أي ١٠٠ × ١٠٠ × ٥ = ٥٠٠

والأرباح المتوقعة للبدائل المختلفة تحسب كما يلي:

وأكبر ربح متوقع همو بانتـاج ٤٠٠ وحلة، حيث يكــون الربـــع المتوقــع ٢٥٠٠ ديناراً.

وتحسب قيمة المعلومات الكاملة The Expected Value of Perfect على النحو التالي:

قيمة المعلومات الكاملة = الربع المتوقع في حالة التأكد ـ الربع المتوقع في حالة المخاطرة، والربع المتوقع في حالة المخاطرة، والربع المتوقع في حالة التأكد نحصل عليه بضرب كل قيمة على قطر المصفوفة بالاحتيال المقابل، أي أن

., Y × 0 · · ·

** · · =

قيمة المعلومات الكاملة = ٣٢٠٠ - ٢٥٠٠ = ٧٠٠ دينار

ثانياً جدول الخسائر المشروطة

تقسم الخسائر إلى نوعين

 ١ - خسائر التقادم وهي التي تحدث عندما تكون الكمية المنتجة أو المغزونة (البديل)
 أكبر من حجم الطلب في السوق وتحسب لكل صف عند تثبيت حجم الطلب (العمود).

٢ ـ خسائر الفرص المضاعة وهي تحدث عندما تكون الكمية المنتجة أو المخزونة (البديل) أقل من حجم الطلب في السوق وتحسب لكل عمود عند تثبيت البديل (الصف).

والنتائج مبينة في الجدول التالي:

خسائر الفرص المضاعة

0 * *		***	7	1	ن الطلب	حالان
٠,٢	٠,٢	٠,۴	٠,٢	٠,١	_ال البدائل	الاحتم
٤٠٠٠	T···	Y	1 * * *	صفر	1	3
****	Y	1	صفر	٥٠٠	7	التقادم
****	1	صفر	0	1	۳.,	
1	صفر	٥٠٠	1	10	٤٠٠	ا به
صفر	0 * *	1	10	Y	0 * *	

وعناصر هذه المصفوفة تمثل اما خسائر الفرص المضاعة أو خسائر التقادم، فمثلاً العنصر عند تقاطع البديل ٣٠٠ (الصف الثالث) مع حالة الطلب ١٠٠ (العمود الأول) يمثل الخسارة التي تتحقق نتيجة بقاء ٢٠٠ في المخزن دون بيع وبالتالي اضطرار التاجر لبيعها خارج الموسم بخسارة مقدارها ١٠٠٠ دينار، أما العنصر عند تقاطع البديل ٢٠٠ (الصف الثاني) مع حالة الطلب ٤٠٠ (العمود الرابع) فهدو عبارة عن الربع الذي كان من المكن أن يتحقق عند انتاج أو تخزين ٤٠٠ وحدة بدلاً من ٢٠٠ وبالتالي ضاعت فرصة بيع ٢٠٠ وحدة أخرى من السلعة في الموسم كان يمكن أن

والقيمة المتوقعة للخسارة عند كل بديل تحسب على النحو التالي:

البديل ١٠٠ : صفر ١٠٠ + ١٠٠٠ × ٢٠٠ + ٢٠٠٠ + ٢٠٠٠ × ٢٠٠٠ × ٢٠٠٠ + ٢٠٠٠ × ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠

البديل ۲۰۰ : ۵۰۰ ،۱.۱ + صفر ۲۰.۲ + ۲۰۰۰ ، ۲۰۰۰ ۲۲۰۰ + ۲۰۰۰ ۲۲، ۲۲۰۰ + ۲۰۰۰ ۲۲، ۱۳۵۰ منبر ۲۳۰۰ ۲۳۰۰ البديل ۲۰۰۰

البديل ۳۰۰ : ۲۰۰۱ × ۲۰۰۱ + ۱۰۰۰ × ۲۰٫۳ + سفر × ۳٫۳ + ۱۰۰۰ × ۲۰۰۰ × ۲۰۰۰ ۲۰۰۰ ۲۰۰۰. - ۸۰۰

البليل ۲۰۰۰ : ۲۰۰۱ ۱۰۰۰ + ۲۰۰۱ ۲۰۰۰ + ۲۰۰۱ + ۱۰۰۰ مفر ۲۰۰۲ + ۲۰۰۰ + ۲۰۰۳ البليل ۲۰۰۰ + ۲۰۰۰ + ۲۰۰۱ + ۲۰۰۳ + ۲۰۰

البليل ٥٠٠ : ٠٠٠٠ × ١٠٠٠ + ١٠٠٠ × ٢٠٠٠ + ١٠٠٠ × ٢٠٠٠ + صقي × ٢٠٠٠ البليل ٥٠٠ + منه × ٢٠٠٠ + صقي × ٢٠٠٠ البليل ٥٠٠ - منه

وأقل خسارة ممكنـة هي بانتـاج أو تخزين ٤٠٠ وحـدة، وهو نفس القـرار الذي توصـلنا إليه باستخدام جدول الأرباح المشروطة. وقيمة المعلومات الكاملة = قيمة الخدارة في حالة المخاطرة _ قيمة الحدارة في حالة المخاطرة _ قيمة الحدارة في حالة التأكد = صفر لأنها حاصل ضرب القيم على قـطر المصفوفة في جدول الحدائر المشروطة بالاحتهالات المقابلة، وبالتالي فإن قيمة المعلومات الكاملة = ٠٧٠ - صفر = ٧٠٠ وهي أيضاً نفس النتيجة التي توصلنا إليها في جدول الأرباح المشروطة.

ثالثاً التحليل الحدي

لقد افترضنا في جدولي الأرباح والحسائر المشروطة أن البدائل أو الاستراتيجيات التي يستخدمها التاجر هي ١٠٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ٣٠٠، ٤٠٥ فقط. وبشكل عام إذا كان أمام التاجر البديل ١٠٠ والبديل ٢٠٠ مثلًا فإنه ليس هناك ما يمنم وجود بديل آخر بين هذين البديلين يمكن استخدامه. ومن هنا تأتي فكرة التحليل الحدي والتي تتلخص فيها يلي:

عند شراء وحدة إضافية من السلعة فهي إما أن تباع أو لا تباع. فإذا كان احتيال بيع الوحدة الحدية هوح فإن احتيال عدم بيعها هو ١ - ح. وإذا بيعت الوحدة الحدية فإن المنتج أو التاجر يحقق زيادة في أرباحه يطلق عليها الربح الحدي Marginal Profit ونرمز له بالرمز رد وهو عبارة عن الفرق بين ثمن البيع والتكاليف، أي ان رد = ثمن البيع مثن التكاليف، أما في حالة عدم بيع الوحدة الإضافية فإن الربع ينخفض بمقدار يطلق عليه الخسارة الحدية وسوف نرمز لها بالرمز س د.

ونستخدم في التحليل الحدي القاعدة التوازنية المعروفة في الاقتصاد والتي تنص على أن الكمية المنتجة أو المخزّنة التي تحقق أقصى ربح هي عندما يكون

الربح الحدي المتوقع = الخسارة الحدية المتوقعة حيث الربح الحدي المتوقع = الربح الحدي × احتيال بيع الوحدة الحدية = رد × ح الحسارة الحدية × احتيال عدم بيع الوحدة الحدية الحدية الحدية الحدية = س د (۱ - ح) = س د (۱ - ح)

ومنها نجد أن احتهال بيع الوحدة الحدية هو

وتحسب قيمة ح من التوزيع الاحتيالي المتجمع الصاعد أو الهابط وحجم الكمية المنتجة أو المخزنة المقابلة لقيمة ح من نفس التوزيع وذلك بتطبيق القانون الذي يستخدم في إيجاد الموسيط والمقايس المهاثلة. ولبيان كيفية الحساب فبإنَّا نعود إلى التمرين التوضيحي السابق، حيث

$$(c = 0)$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

والتوزيع الاحتيالي المتجمع الصاعد هو

احتمال عدم بيع الوحدة الحدية	احتمال هذا المستوى من المبيعات	المبيعات بالوحدة
صفر	•,1	1
•,1	٠,٢	4
٠,٣	٠,٣	4
٠,٦	٠, ٢	£ • •
٠,٨	٠, ٢	011
	V2 *	المجموع

وحيث أن ١ - ح = ٠,٦٧ تقع بين ٠,٨، ٠ فإن حجم الانتاج أو مستوى التخزين الذي يحقق أكبر ربح متوقع يجب أن يقع بين ٤٠٠، ٥٠٠ وبالتالي فإن

أسئلة وتماريسين (٢)

- (١- ٢) يصنف رئيس قسم شؤون الموظفين في مؤسسة معينة المتقدمين للعمسل كمهندسين في مؤسسته إلى: (١) أشخاص بحملون درجة جامعية في الهندسة (٢) أشخاص لديم الخبرة العملية الهندسية. فيإذا علم أن نسبة الذين بحملون شهادة جامعية من بين المتقدمين للعمل سواء كان لديم خبرة أم لا هي ٧٠٪ ونسبة الذين لديم خبرة عملية سواء كانوا يحملون شهادة جامعية أم لا هي ٢٠٪ ونسبة الذين يحملون شهادة جامعية ولديم خبرة عملية هي ٥٠٪ واخترنا عشوائياً شخصاً من بين المتقدمين للعمل، ما احتيال أن يكون من الأشخاص الذين يحملون شهادة جامعية أو لديم الخبرة العملية من الأشخاص الذين لا بحملون شهادة جامعية أو لديم الخبرة العملية جامعية وليس لديم الخبرة العملية الهندسية؟
- (٢- ٢) مصنعان ينتجان المصابيح الكهربائية، الأول ينتج ٧٥٪ من حاجة السوق و٧٠٪ من انتاجه يعمّر ٢٠٠ ساعة فأكثر أما الشاني فإنه ينتج ٧٥٪ من انتاجه يعمّر ٢٠٠ ساعة فأكثر، فإذا اخترنا عشوائياً مصباحاً كهربائياً من انتاجه يعمّر ٢٠٠ ساعة فأكثر، فإذا اخترنا عشوائياً مصباحاً كهربائياً من انتاج هذين المصنعين فيا هو احتيال أن يعمر ٢٠٠٠ ساعة فأكثر فيا هو احتيال أن يكون من انتاج المصنع التي تعمّر ٢٠٠٠ ساعة فأكثر فيا هو احتيال أن يكون من انتاج المصنع الأول؟
- (٣-٣) إذا كانت نسبة العيال الذكور في مصنع معين تساوي ٦٥, ونسبة العيال الذكور والمتزوجين ٤٧, واخترنا عشوائياً مفردة من عيال هذا المصنع فيا هو احتيال:
 - ١ _ أن تكون هذه المفردة أنثى متزوجة؟
 - ٢ _ أن تكون هذه المفردة ذكراً أو متزوجاً (ذكراً أو أنثى) أو الاثنين معاً؟
- (٤ ـ ٢) أجرت وكالة إحدى الشلاجات دراسة شملت ٨٠٠ أسرة في مدينة ما وقــد

أمكن الحصول على بيانات عن حجم الثلاجة التي تملكها الأسرة وقت القيام بالدراسة وحجم الثلاجة التي تفضلها ربة الأسرة، وصنّفت أسر العينة في جدول مزدوج على النحو التالي:

حجم الثلاجة الفضل					
المجموع	۱۱ قدم فأكثر	9–11 قلم	أقل من ٩ قدم		
45.	٧٠	٧٠	٩٠	أقل من ٩ قدم	حجم الثلاجة
. 3 3	٣.	٤٠٠	1.	۱۱-۹ قدم	الحالية
14.	1	٧٠	صفر	۱۱ قدم فأكثر	
A	¥	A	1	المحموع	

فإذا اخترنا عشوائياً مفردة من مجتمع هذه الدراسة، أوجد ما يأتي:

- ١ ـ احتمال أن تكون هذه المفردة من مالكي الثلاجات أقل من ٩ قدم
- ٣ ـ احتمال أن تكون هذه المفردة ممن يفضلون الثلاجة ١١ قدم فأكثر
- ٣- احتيال أن تكون هـذه المفردة عن يفضلون الشلاجـة ٩- ١١ قـدم إذا
 علمت أنها تملك ثلاجة ١١ قعم فأكثر.
 - ٤ _ احتمال أن تفضل الثلاجة التي تملكها حالياً.
- د ـ احتال أن تكون عن يفضلون حجاً أكبر من حجم الثلاجة التي تملكها
 حالماً.
- (٥ ـ ٣) يانصيب خيري مكون من ١٠ آلاف تذكرة ويعطي ١٠٠ جائزة. ما هو أقل عدد من التذاكر الذي يجب أن يشتريه شخص ما كي يكون احتمال أن يربع جائزة واحدة على الأقل أكثر من ٥٠,٠٠٠ (ملاحظة: لو ٩٩ ـ ١,٩٩٥٦، لو٢ = ٢٠٣٠٠)
- (٢ ٢) إذا رمينــا زهرة طــاولة منتــظمة وقــطعة نقــود غير متحيــزة وسحبنا ورقــة من مجموعة أوراق اللعب، فها هو احتيال أن يظهــر الرقم ٢ عــل زهرة الــطاولة
- (٧ ـ ٢) إذا فرضنا أن ٥٪ من الذكور، ١٪ من الإناث في مجتمع معين عندهم عمى

والصورة على قطعة النقود والرقم ٧ على ورقة اللعب؟

ألـوان واختار بـاحث شخصاً عنـده عمى ألوان، مـا احتيال أن يكــون هذا الشخص ذكراً؟ وما احتيال أن يكــن هذا الشخص أنذ ؟

(٨ ـ ٢) ثلاثة أشخاص يعملون مستقلين عن بعضهم البعض لحل رموز رسالة $\frac{1}{\pi}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{\pi}$ ،

(٩ ـ ٢) إذا كان لدينا جدول الحياة التالى:

العمر س	عدد الأشخاص الذين يعيشون حتى العمر س
صفر	1
1.	477 0 1
٧٠	97797
٣٠	994
٤٠	۸٦٨٨٠
٥٠	V.04/
7.	TVVAV
٧٠	17753
٨٠	19.47.
4.	TAIT
1	70

أوجد

- ١ _ احتمال أن يعيش المولود حتى العمر ٤٠ سنة
- ٢ _ احتمال أن يعيش خسة أشخاص في سن الثلاثين حتى سن الأربعين.
- ٣ ـ في عائلة مكونة من أب عمره ٤٠ سنة وأم عمرها ٣٠ سنة وولـد عمره
 ١٠ سنوات، احتيال أن يعيشوا جميعاً ١٠ سنوات أخرى.
- (١٠ ـ ٢) قامت شركة بفحص ٥٠٠ من المتقدمين للعمل لديها كسائقي آلات ثقيلة (أ، ب) وكانت نتيجة الفحص كما يلي:
 - ٣٠٠ شخص يجيدون العمل على الآلة أ.

- ٢٠٠ شخص يجيدون العمل على الآلة ب
- ١٤٠ شخص يجيدون العمل على الألة أ والألة ب
- فإذا اخترنا عشوائياً شخصاً من هـ لم المجموعـ ق، فها هـ و احتمال أن يجيـ لـ العمل على آلة واحدة على الأقل.
- (١١ ـ ٢) إذا كان لدينا ثلاثة عهال في أحمد الهصائح، وكان انساجهم اليومي ونسبة التالف في انتاج كل منهم كها يلي:

نسبة التالف في الانتاج اليومي للعامل	الانتاج اليومي بالوحدة	العامل
•,•1	٤٠	Ĭ
٠,٠٥	۳٥	ب
•,••	To	ج

واخترنا عشوائياً وحدة من انتاج هؤلاء العيال في يوم معين، فيا هـــو احتيال أن تكون هذه الوحدة تالفة؟ وإذا علم أنها تـــالفة مـــا احتيال أن تكـــون من انتاج العامل الأول؟

- (۱۲ ـ ۲) إذا كانت نسبة الطلاب الذكور في كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية المذين يلعبون كرة السلة هي ۲۰٪ والمذين يلعبون كرة السلة هي ۲۰٪ والمدين يلعبون كرة القدم وكرة السلة معاً هي ۱۰٪ واخترانا عشوائياً طالباً من طلاب هذه الكلية، فيا هو احتيال أن يكون من لاعبي كرة القدم أو كرة السلة؟ وما هو احتيال أن لا يكون من لاعبى كرة القدم وكرة السلة؟
- إذا كان احتيال أن يجال عطاء مد شبكة المياه في مدينة معينة على متعهد مـا

 هـ $\frac{Y}{Y}$ واحتيال أن يجال عليه عطاء مد شبكة الكهربـاء في نفس المدينة

 هـ $\frac{\Phi}{Y}$, وإذا كان احتـيال أن يحصل عـل عطاء واحـد على الأقـل هـو $\frac{\delta}{X}$. فيا هو احتيال أن يحصل على العطائين معاً $\frac{\delta}{X}$. فيا هو احتيال أن يحصل على العطائين معاً $\frac{\delta}{X}$.
- (١٤ ٢) تقدم شخصان بعلمين للحصول على وظيفة في مؤسسة معينة، فإذا كان احتيال أن يحصل الشخص الأول على الوظيفة المذكورة هو $\frac{1}{V}$ واحتيال أن يحصل عليها الشخص الثاني هو $\frac{1}{V}$ ، أوجد:

١ - احتمال أن يجصل الشخصان على الوظيفة

٢ - احتمال أن نخصل شخص واحد فقط على الوظيفة

٣- احتمال أن لا يحصل أي منهما على الوظيفة.

(١٥ - ٢) شركة تفكر في إنتاج سلعة جديدة وتقلّر دائرة التخطيط والتسويق في
 هذه الشركة أنها إذا قامت بإنتاج هذه السلعة بنفس الإمكانيات الحالية
 فإنها سوف تحصل على الأرباح التالية باحتمال مين إزاء كل منها:

الربح الاحتيال

۳۰۰ ألف دينار ۳۰۰

۱۵۰ ألف دينار ۲۰۰،

۷۰ ألف دينار ۲۰٫۱۰

(T-17)

أما إذا قامت الشركة بتطوير الآلات والأجهزة والإمكانيات الأخرى بنفقات تطوير مقدارها ١٠ آلاف دينار فإن كل ربح من الأرباح السابقة يقل بمقدار ٢٠ ألف دينار ولكن تتغير بالمقابل احتيالات الربح لتصبح ٨٨٠، ١٠، ١٠، ٥٠، ٥ على التوالي. وبالإضافة إلى ذلك فإن إدارة الشركة تعتقد بأن احتيال نجاح خطة التطوير هو ٧٠، وإن احتيالات الربح في حالة علم نجاح خطة التطوير تبقى ثابتة كيا هي في حالة عدم اللجوء إلى هذه الخطة.

والمطلوب هو مساعدة الشركة بإنخاذ قرار بالتطوير أو عدمه وذلك باستخدام شجرة القرارات.

إذا كان لدى مصنع لإنتاج الأغذية المحفوظة بديلان: الأول هو بناء مجمّع كبير في منطقة أخرى لمواجهة طلبات المستهلكين المتزايدة، والثاني هو بناء مجمّع صغير بجانب المصنع الحالي ومرتبط به ومن ثم توسيعه إذا ازداد حجم السوق بشكل يبرر ذلك. وتقدّر إدارة المصنع تكاليف إنشاء مجمّع كبير به ١٠٠ ألف دينار وتكاليف بناء مجمّع صغير به ٧٠ ألف دينار وتكاليف توسيعه في المستقبل، إذا لزم ذلك، به ٤٠ ألف دينار واحتال تزايد الطلب بشكل يبرّر هذا التوسع به ٥٠٠٠. وتصنف دائرة التخطيط والتسويق في هذا المصنع مستوى الطلب

والربح الإجمالي والإحتمال المرتبط بكل مستوى، في حالة اختيار البديل الثاني، على النحو التالى:

الاحتسال في حالسة	الاحتبال في حالة		
عدم مواتناة السنوق	مبواتياة البسوق		
للتوسع	للتوسع	الربح الإجمالي	مستوى الطلب
•,10	٠,٧٠	٣٠٠ ألف دينار	عال
•, ٢٥	٠,٢٠	۱۰۰ ألف دينار	متوسط
•,3•	٠,١٠	٥٠ ألف دينار	ضعيف

كيا أن مستوى الطلب والربح الإجمالي والإحتمال المرتبط بكل مستوى في حالة بناء مجمّع كبير في منطقة أخرى هو كيا يلي :

الاحتيال	الربح الإجمالي	مستوى الطلب
٠, ٤٠	۲۰۰ ألف دينار	عال
.,**	۱۰۰ ألف دينار	متوسط
•,*•	۳۰ ألف دينار	ضعيف

والمطلوب هو مساعدة هذه الشركة في إتخاذ القرار المناسب وذلك باستخدام شجرة القرارات.

- (١٧ ٢) تاجر ملابس صوفية يريد تحديد الكمية التي سيطلبها من نوع معين من الملابس التي سيبيعها في موسم الشتاء القادم.
 - إذا اعطيت لك المعلومات التالية:
- التاجر يكسب ١٠ دنانير في القطعة التي يتمكن من بيعها خلال
 الموسم بينها يخسر ٥ دنانير في القطعة التي يضطر إلى بيعها في تصفية
 نهاية الموسم.
- يضدر التاجر مبيعاته المنتظرة خلال موسم الشتاء القادم من هذا النوع من الملابس على النحو التالى:

المبيعات المنتظرة بالقا	ذا كان الشتاء	
0	بارداً جداً	
***	باردأ	
***	معتدلاً	
0 *	دافثاً	

كما تبينٌ من إحصاءات دائرة الأرصاد الجوية ما يأتي:

الشتاء	التكرار النسبي
بارد جداً	X1.
بارد	7.8 •
معتدل	% r •
دافىء	X.4.

والمطلوب تحديد:

 الكمية التي يجب أن يطلبها الناجر لتحقيق أكبر ربع ممنوقع وذلك باستخدام جدول الأرباح المشروطة وجدول الخسائر المشروطة والتحليل الحدي.

٢ _ قيمة المعلومات الكاملة.

((١٨ - ٢) إذا كان الطلب على نوع من الفطائر في أحد المخابز يتبع التوزيع الإحيالي التالي:

الاحتيال	حجم الطلب بالكيلوغرام
,	1
٠,٣	10.
٠,٤	Y
*,1	Y2.

وإذا كان المخبز يربح ٥ قــروش في كل كيلوغــرام يباع في اليــوم الذي

يخبز فيه ويخسر ١٠ قروش في كل كيلوغرام لا يباع في اليوم الذي يخبز فيه (وهذا هو سعر التكلفة حيث أن الفطائر تصبح غير صالحة عندما لا تباع في موصدها). فيا هي الكمية التي يعدها المخبز لتحقيق أكبر ربح متوقع؟ وما هي قيمة المعلومات الكاملة؟ استخدم التحليل الحدي في تحديد الكمية التي تحقق أكبر ربح متوقع إذا علم أن حجم الطلب يكن أن يكون أية كمية في المدى ١٠٠ ـ ٢٥٠.

(7-14)

قام باحث بدراسة عينة من الأطفال لمعرفة مدى إصابة أفراد هذه العينة بأحد أمراض العيون أو الأسنان أو الأذن، وحصل من هذه الدراسة على النتائج التالية:

٣١٪ مصابون بأحد أمراض العيون (أ)

٣٣٪ مصابون بأحد أمراض الأسنان (ب)

٧٧٪ مصابون بأحد أمراض الأذن (جــ)

 ٦٪ مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأسنان وأصحاء الأذن

 ١٠٪ مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأذن وأصحاء الأسنان

 ١٢٪ مصابون بأحد أمراض الأسنان وأحد أمراض الأذن وأصحاء العيون

مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأذن وأحد أمراض الأسنان.

١ ـ أوجد نسبة الأصحاء بالعينة

إذا اخترنا عشنوائياً أحد أطفال هذه العينة، ما هو احتمال أن
 يكون مصاباً بأحد الأمراض على الاقل؟

إذا اخترنا عشوائياً أحد أطفال هذه العينة، ما هو احتيال أن
 يكون من المصابسين بأحد أمراض الأذن وأصحاء العيون
 والاسنان؟

الباب الثالث

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتيالية Random Variables and Probability Distributions

تقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين:

Discrete Random Variables

أولاً: متغيرات عشوائية متقطعة

Continuous Random Variables

ثانياً: متفيرات عشوائية متصلة

والمتغير العشوائي المتصل هو الذي يأخذ أي قيمة في مدى معين فإذا اعتبرنا عمر الطالب في كلية الإقتصاد والتجارة وحصلنا على طالب عصره ١٩ عاماً وطالب ثان عمره ١٩ عاماً و ٣ أشهر فإنه من الممكن أيضاً أن نجد طالباً ثالثاً عمره يقح بين عمر الطالب الأول وعمر الطالب الشاني. والمتغيرات العشوائية المتصلة كشيرة منها: الدخل، الوزن، الطول، المسافة، وقوع المتغير العشوائي في فترة مها صغرت من المدى الذي يتغير فيه يرتبط باحتال معين .

الفصل الأول

دالة كثافة الإحتال ودالة الإحتال التجميعي Probability Density Function and Cumulative Probability Function

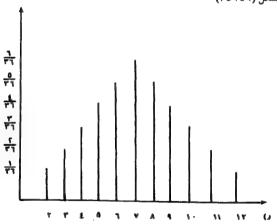
(١ ـ ١ ـ ٣) دالة الاحتيال للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها

إذا كسان المتغير العشسوائي المتقطع من يسأخسذ القيم ° 4 6 7 6 باحتمالات معينة فإن ح (س = ر) تسمى دالة الاحتمال لهذا المتغير حيث ر = ° 4 6 6 7 6 فإذا رمينا زهرتي طاولة وكان الرامي غير متحيز فإن المجموع (س) الذي يظهر على الزهرتين معاً يسمى متغيراً متقطعاً ويأخذ القيم ٢ 6 ٣ 6 ١ ٢ . وعكن كتابة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution لهذا المتغير على النحو التالى وذلك باستخدام المعادلة (١ - ١ - ٢)

ح (س = ر)	ر
1	۲
77	٣
4	٤
3	٥
0	٦
7	٧

A	77
4	177
1.	""
11	77
17	177
	. 77
المجموع	77

ويمكن عرض بيانات هذا التوزيع بخطوط عمودية Bar Chart على النحو المبينَ بشكل (١ ـ ١ ـ ٣)



وتتصف دالة الإحتيال للمتغير العشوائي المتقطع ح (س ≈ ر) بالخواص التالية: ١ ـ قيمة دالة الإحتيال موجبة لجميم قيم المتغير أي أنغلاس = ر) ≥ صفر

٢ - تقع قيمة دالة الإحتمال لجميع قيم المتغربين صفر و١، أي أن

، کتے بینہ کا کی اور عیان جسیتے کیا ہے۔ صفیر ≤ ح (س=ر) ≤ ۱

صفر = ح (س = ر) = ۱

٣ جموع الاحتمالات لجميع قيم المتغير س يساوي واحد صحيح ،
 أي أن مجتــ (س = ر) = ١

را ـ ۱ ـ ۱ ـ ۱) دالة الاحتيال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها:

نرمز لدالة الاحتيال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع بالبرميز م (س)،

مرمز لمدانه الاحتيال التجميعي للمتعير العشواني المتعظع بالبرميز م (س)، والاحتيالات التجميعية لهذا المتغير التي يمكن أن نحسبها هي:

۲ ـ ح (س ≥ ر) ک ح (س > ر)

۴ - ح (ر ≤ س ≤ و) ک ح (ر < س ≤ و) ک ح (ر ≤ س < و) ک ح (ر < س < و) حیث و > ر.

فإذا اعتبرنا مثال زهرتي الطاولة السابق، فإن:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} = \frac{7}$$

$$\int (-\infty < 3) = \frac{1}{pq} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\int (7 < w \le r) = \frac{7}{r7} + \frac{3}{r7} + \frac{0}{r7} = \frac{7r}{r7} = \frac{1}{r7} = \frac{1$$

وتتصف دالة الاحتيال التجميعي للمتغير المتقطع بأنها:

Nondecreasing عير متناقصة ١

۲ _ ح (س < الحد الأدنى) = صفر ح (س > الحد الأعلى) = صفر

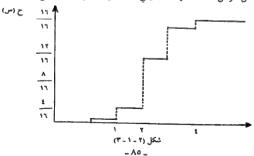
ح (س ﴿ الحد الأعلى) = ١

ح (ص الحد الاعل) = ١ ٢ ـ غر متصلة ٢ ـ عدر متصلة كالعدين علاقة الاعلى على العديد الاعلى على العديد الاعلى العديد ا

فإذا رمينا قطعة نشود ٤ مرات فبإن التوزيع الاحتيالي والاحتىهالات التجميعية لعدد مرات ظهور الصورة هو:

ع (س) = ح (س ≤ ر)	ح (س = ر)	ر
1	اًن ا	
r/	17 - 17	
٥	ئق، ع	
17	73 - 17	1
11	ئق، ٦	
17	73 = T/	4
10	ئقم غ	
17	73 = 71	Т
17	اق، ۱	
17	73 = 11	2

ويمكن عرض دالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير كها هو مبين بالشكل (٢ - ١ -٣)



يتفسح من الشكل (٢ - ١ - ٣) أن دالة الاحتيال التجميعي للمتغير المتفطع مندرجة.

لا يمكن الحصول على دالة الاحتيال للمتغير المتقطع من دالة الاحتيال التجميعي
 لهذا المتغير باستخدام التقاضل.

(٣ - ١ - ٣) دالة كثالة الاحتيال للمتغير المتصل وخواصها:

المتغير العشوائي س يسمّى متغيراً متصلًا إذا وجد دالة تسمى دالة كثافـة احتيال الهذا المتغير نرمز لها بالرمز ح (س) وتحقق الشروط التالية:

ونحسب في هذه الحالة احتيال أن يقع المتغير في فترة أو مجموعة غير متداخلة من الضترات. ولا يؤثر على قيمة الاحتيال أن تكون الفترة مفتوحة أو مغلقة حيث أن احتيال أن يأخذ المتغير المتصل قيمة عددة يساوي صفراً. والقيمة التي تجصل عندما نعوض عن المتغير بقيمة معينة في دالة كثالة الاحتيال عبارة عن الاحداثي الصادي عند هذه القيمة.

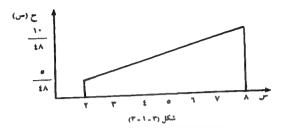
فإذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال:

$$A > m > 7$$
 (س + 4) $= \frac{1}{4}$ (س + 4) $= m$

فإن قيمة هذه الدالة أكبر من صفر لجميع قيم المتغير، كما أن

$$\sqrt[4]{\frac{1}{\Lambda^{\frac{1}{2}}}} \left(m + 7 \right) c m = \frac{1}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{m^{\frac{1}{2}}}{T} m_{m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ويمكن رسم هذه الدالة كها هو مبين بالشكل (٣ ـ ١ ـ ٣)



(٤ - ١ - ٣) دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل وخواصها:

سوف نرمز لدالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل بالرمز م (س) حيث مراس) = مدر المراس د س

والاحتمالات التجميعية التي يمكن أن ندرسها هي:

حیث س > س،

ونتصف دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل بالصفات التالية:

١ ـ دالة غير تناقصية

٣ ـ دالة متصلة

 ٤ - يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتيال للمتغير المتصل بإيجاد المشتقة الأولى لدائـة الاحتيال التجميعي لهذا المتغير.

فإذا اعترنا دالة كثافة الاحتمال:

$$A > w > \gamma \qquad (w + \gamma)$$

صفر فيها عدا ذلك

فإن

$$(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{\infty} (\omega + \gamma) c \omega = \frac{1}{2 \sqrt{\gamma}} \left(\frac{\omega}{\gamma} + \gamma \omega - \gamma \right)$$

ويمكن رسم دالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير على النحو التمالي والمنحنى كما هو مين في الشكل (٤ ـ ١ ـ ٣)

$$S(Y) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{Y^{*}}{Y} + Y \times Y - \Lambda \right) = \omega \hat{a}_{\chi}$$

$$S(\hat{s}) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{\hat{s}^{*}}{Y} + Y \times \hat{s} - \Lambda \right) = \frac{Y\hat{t}}{\Lambda \hat{s}}$$

$$S(\hat{r}) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{Y^{*}}{Y} + Y \times r - \Lambda \right) = \frac{\Lambda Y}{\Lambda \hat{s}}$$

$$S(\hat{r}) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{\Lambda^{*}}{Y} + Y \times \Lambda - \Lambda \right) = 1$$

$$S(\hat{r}) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{\Lambda^{*}}{Y} + Y \times \Lambda - \Lambda \right) = 1$$

$$S(\hat{r}) = \frac{1}{\Lambda \hat{s}} \left(\frac{\Lambda^{*}}{Y} + \frac{\Lambda^{*}}{Y} \times \Lambda - \Lambda \right) = 1$$

(٥ ـ ١ ـ ٣) دالة كثافة الاحتيال المشتركة والهامشية والشرطية:

Joint, Marginal and Conditional Probability Density Functions:

سوف ندرس هذه الدوال في حالة المتغيرات المتقطعة والمتصلة

أولاً: المتغرات المتقطعة:

إذا كان لدينا كيس به ن كرة متشاجهة وموزعة على النحو التالي: ن، كرة بيضاء، ن، كرة حراء، ن، كرة خضراء بحيث أن ن، + ن، + ن، = ن وسحبنا م كرة من هذا الكيس وفرضنا أن س يرمز لعدد الكرات البيضاء، ص يرمز لعدد الكرات الخضراء، فإن دالة الاحتيال المشتركة للمتغيرين س، ص يمكن كتابتها على النحو التالي:

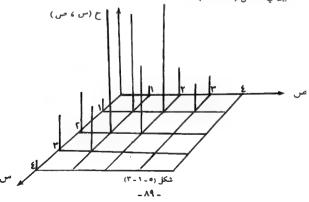
$$= (m = 0, 0) = \frac{\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}} = (1 - 1)$$

$$= (m = 0, 0) = \frac{(m + 1)^2}{m^2}$$

$$= (m + 0, 0) = \frac{(m + 1)^2}{m^2}$$

$$= \frac{(m + 1)^2}{m^2}$$

وإذا فرضنا أن ن = 10 ك ن، = 7 ك ن، = 0 ك ن = 3 وسحبنا مع الإعادة ξ كرات، فإنه يمكن كتابة دالة الاحتيال بالتعويض في (١ - ١ - ٣) ورسمها كما هو من في الشكا (٥ - ١ - ٣)



أما دالة الاحتيال الهامشية لعدد الكرات من اللون الأبيض (س) فهي:

أما دالة الاحتيال الشرطية لعدد الكرات البيضاء (س) إذا علم عدد الكرات الخضراء (ص) فهي:

ودالة الاحتمال الشرطية لعدد الكرات الخضراء (ص) إذا علم عدد الكرات البيضاء (س) هي:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dt}{dt} = \frac{dt$$

ثانياً: المتغيرات المتصلة

سوف نعتبر هنا للسهولة دالة كثافة احتيال مشتركة لمتغيرين فقط. فإذا فرضنا أن

دالة كثافة الاحتيال هي:

$$4 < (-1) = \frac{1}{\Lambda}$$
 (7 - س - ص) صفر $4 < -1$ (7 - ص $4 < -1$) $= -1$ صفر فيها عدا ذلك

ودالة الاحتيال التجميعي ع (س ٤ ص) لهذه الدالة هي:

$$q(m^2 - m) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{m^2}{\Lambda}} \int_{-1}^{1} (1 - m - m) c m c dm$$

$$= \frac{1}{17} m(m - 7) (11 - m - m)$$

وتكون دالة الاحتيال التجميعي موزعة على ٩ مناطق كما هـو مبين في الشكــل (١ ـ ١ ـ ٣)

٣	Ł	4
	(8 6 1)	(£ 6 Y)
۲	(7 6 1)	A (Y 6.Y)
١	1	v
	(F-1 1) K+	1

في المنطقة ١

في المناطق ٢ ك ٣ ك ٦ ك ٧

في المنطقة ع:

قيمة التكامل موجبة إذا كان صفر ﴿ س ﴿ س * ٢ ﴿ ص < ٤ وبالتـالي

فإن :

$$g(m) = m - m \int_{-m}^{m} \int_{-m}^{m} (r - m - m) c m c dm$$

$$= \frac{1}{M} m (r - m) = -g(m)$$

صفر ≤ س ≤ ۲ 6 ص ≥ ٤

ل المنطقة ٥:

$$\frac{1}{2}$$
 (m) ص) = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ (7 - m - m) $\frac{1}{2}$ c ص $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{$

في المنطقة ٨:

قيمة التكامل موجبة إذا كان صفر ≤ س ≤ ٢ ك < ص ≤ ص° وبالتــالي

iji:
$$\frac{d}{dt} (m \ dt) = \frac{1}{m_{t}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (7 - m - m) c m c m$$

$$= \frac{1}{\Lambda} (m - Y) (\Lambda - m) = - (Y \ dt)$$

س ≥ ۲ 6 ۲ ≤ ص ≤ ٤

في المنطقة ٩

$$\frac{1}{2}$$
 (m) ص = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ (7 - m - $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{4}$

وبوضع جميع هذه النتائج معاً فإن:

$$4 \times 10^{-4} = \frac{1}{17}$$
 س (ص - ۲) (۱۰ - ص - س) کا صفر $\leq m \leq 1$ $\leq m \leq 1$

$$= \frac{1}{\Lambda} - \omega (\Upsilon - \omega) \partial \omega \dot{\omega} \leqslant \omega \leqslant \Upsilon \partial \omega \geqslant 3$$

$$= \frac{1}{\Lambda} (\omega - \Upsilon) (\Lambda - \omega) \qquad \omega \geqslant \Upsilon \partial \Upsilon \leqslant \omega \leqslant 3$$

$$= 1$$

ويمكن إيجاد إحتهال أن تقع (س، ص) في مستطيل معين وليكن .

أ. ≤س ≤ أً٢، ب. ≤ ص ≤ ب, كما هو مبين في الشكل (٧ ـ ١ ـ ٣) على النحو التالى:

 $\begin{array}{l}
- (i_1 \leqslant m \leqslant i_7, \, \psi_1 \leqslant m \leqslant \psi_7) \\
= - (m \leqslant i_7, \, m \leqslant \psi_7) \\
- - (m \leqslant i_7, \, m \leqslant \psi_1) \\
- - (m \leqslant i_7, \, m \leqslant \psi_1) \\
- - (m \leqslant i_7, \, m \leqslant \psi_7) \\
- - - (m \leqslant i_7, \, m \leqslant \psi_7)
\end{array}$

+ ۲ح (س ﴿ أَ١، ص ﴿ ب١)

وإذا فرضنا أن أ، = صفر، أ، = ١، ب، = ٣، ب، = ٤ فإن

$$a_{ni_{1}} \int_{1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{1}} = m - m \cdot c \cdot m \cdot$$

أه

ح (صفر \leq س \leq ۱، q \leq ۵) = ح (س \leq ۱، q \leq 3)

$$- \sin(x - \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (1 - \sin x) \cos x dx$$

$$=\sqrt{\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r}-\frac{1}{r}-\frac{\omega}{r}\right)c\omega$$

$$-r \int_{1}^{T} \left(\frac{r}{\Lambda} - \frac{r}{\Gamma l} - \frac{\omega_{c}}{\Lambda} \right) c \omega_{c}$$

$$=\frac{1}{1}\left[\frac{\frac{1}{1}}{1} - \omega - \frac{1}{1} - \omega - \frac{1}{1}\right]$$

$$\frac{7}{7} \left[\frac{7}{\Lambda} - \omega - \frac{1}{11} - \omega - \frac{7}{11} \right] -$$

$$=\left(\frac{37}{\Lambda}-\frac{3}{57}-\frac{77}{57}\right)-\left(\frac{77}{\Lambda}-\frac{7}{57}-\frac{3}{57}\right)$$

$$-\left(\frac{\lambda t}{\Lambda} - \frac{\gamma}{tt} - \frac{p}{tt}\right) - \left(\frac{\gamma t}{\Lambda} - \frac{\gamma}{tt} - \frac{3}{tt}\right)$$

الفصل الثانى

العزوم Moments

يمكن حساب العزوم حول أي وسط فرضي أ وسوف نكتفي بدراسة العزوم عندما أ = صفر، أ = A (الوسط الحسابي)، أي العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي. وفكرة العزوم في الاحصاء شبيهة إلى حد ما بفكرة العزوم في المكانيكا إلا أنها في الحالة الأولى شيء يمكن فهمه واستيمابه الا أنه في الحالة الشانية شيء ملموس يمكن مشاهدته.

(١ - ٢ - ٣) العزوم حول الصفر

نرمز للعزم الواوى حول الصفر بالرمز ٨٪ ويعرّف كها يلي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$\mu'_{t} = \frac{2\pi}{t_{t-1}} \cdot t_{t-1}$$

فإذا كانت و = صفر فان:

وإذا كانت و = ١ فإن:

$$\mu = 2$$
الوسط الحساي $\mu = 0$

في حالة المتغيرات المتصلة:

فإذا كانت و = صفر فإن:

وإذا كانت و = ١، فإن:

. $\chi_{x} = \mu$ (m) c m = $\chi_{x} = \mu$

(Y - Y - Y) list on حول الوسط الحسابي

نرمز للعزم الواوي حول الوسط الحسابي بالرمز عمر ويعرّف كما يلي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$\mu_{c} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (c - \mu)^{i} = c$$

فإذا كانت و = صفر فإن:

$$1 = (j = m)$$
 ح (س = ر) = μ

وإذا كانت و = ١ فإن:

 $\mu = 2$ من القيم (أي مجموع إنحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسان يساوى صفراً).

أما إذا كانت و = ٢ فإن:

$$u_{v} = (v - m) - (\mu - v) = 0$$

في حالة المتغيرات المتصلة:

$$(\mu - \mu^{-1})$$
 (m) μ^{-1} (m) μ^{-1}

فإذا كانت و = صفر فإن:

ا = س
$$(س - \mu)$$
 ح $(m - \mu)$

وإذا كانت و = ١ فإن:

 μ = $-\infty$ (س – μ) ح (س) د س) = صفر (مجموع إنحرافـات قيم المتغـر μ

المتصل وعددهم لا نهائي عن وسطها الحسابي يساوي صفراً)

أما إذا كانت و = ٢ فإن

رس – μ ح (س) د س = التباین χ

(٣ _ ٢ _ ٣) العلاقة بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي

إن العزوم حول الوسط الحسابي هي التي تستخدم في قياس الالتنواء والتفرطح ولكننا نعبر عن العزوم حول الصفر لتسهيل العمليات الحسابية.

فإذا اعتبرنا معادلة (٥ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\mu_{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(m^{k} - \epsilon \delta_{k} m^{k} + \kappa \delta_{k} m^{k} + \kappa^{*} \mu^{*} \right) + \dots + (-1)^{k} \mu_{k}^{*}$$

$$+ \ldots + \sum_{k=1}^\infty u^k = (w)$$
 وی μ^k کی μ^k ح μ^k د س μ^k ح μ^k د س $\left\{ u^k = (u-1)^k \right\}_{k=1}^k$

$$(7-7-7)$$
 $(4-7-7)$ $(4-7-7)$ $(4-7-7)$ $(4-7-7)$ $(4-7-7)$ وذلك من المعادلة $(4-7-7-7)$

وعلى هذا فإن

$$(\Upsilon - \Upsilon - V) \qquad \qquad \Upsilon' \mu \qquad + \Upsilon \mu \Upsilon - \Upsilon \mu = \Upsilon \mu$$

 $\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu} =$

$$(\Upsilon - \Upsilon - \Lambda) \qquad \qquad \Upsilon' \mu - \Upsilon' \mu_{\tau} \mu_{\tau} + \Upsilon' \mu_{\tau} \mu_{\tau} = \pi \mu$$

$$(\Upsilon - \Upsilon - \Lambda) \qquad \qquad \Upsilon' \mu + \Upsilon' \mu_{\tau} \mu_{\tau} + \Upsilon' \mu_{\tau} = \pi \mu_{\tau} \mu_{\tau} + \Upsilon' \mu_{\tau} + \Upsilon' \mu_{\tau} + \Pi' \mu_{\tau}$$

$$(7 - 7 - 9) \qquad {}^{2}\mu + {}^{7}\mu'_{1}\mu_{7}\bar{\sigma}^{2} - {}^{7}\mu'_{1}\mu_{7}\bar{\sigma}^{2} + {}^{4}\mu'_{7}\mu_{7}\bar{\sigma}^{2} - {}^{4}\mu = {}_{1}\mu$$

$${}^{2}\mu - {}^{7}\mu'_{1}\mu_{7} + {}^{4}\mu'_{1}\mu_{7} - {}^{4}\mu = {}^{4}\mu = {}^{4}\mu$$

(٤ ـ ٧ ـ ٣) معاملي الالتواء والتفرطح

سوف نرمز لمعامل الالتواء بالرمز β, ولمعامل التفرطح بالرمز β, ويعرف هذين

المعاملين على النحو التالي:

$$\frac{\tau \mu}{\overline{\tau} \mu } = \sqrt{\beta}$$

$$\frac{i\mu}{\tau} = \tau \beta$$

الفصل الثالث

بعض أدلة وصف التوزيعات التكرارية

سوف ندرس الأدلة التالية وخواصها:

۱ ـ دليل التوقع ونرمز له بالرمز ت ۲ ـ دليل التباين ونرمز له بالرمز تبا

٣ ـ دليل التغاير ونرمز له بالرمز تغا

٣ ـ دليل التعاير ونرمز له بالرمز تغا

وبالإضافة إلى هذه الأدلة سوف نعرض باختصار معاملي الالتواء والتفرطح (١ ـ ٣ ـ ٣ ـ دليل التوقع

إذا كان لدينا متغير س ودالة كثافة إحتهاله فإن توقع هذا المتغير عبارة عن وسطه الحسابي، ويعرف التوقع كها يل:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

في حالة المتغيرات المتصلة

ويتصف هذا الدليل بالخواص التالية:

١ .. إذا كان لدينا قيمة ثابتة أ، فإن ت(أ) = أ

٢ ـ إذا كان لدينا متغير عشوائي ص وضربنا كل قيمة من قيم هذا المتغير بالثابت أ فإن
 ت (أ س) = أ ت (س)

٣ إذا كان لدينا متغيران عشوائيان س، ص وعرّفنا متغيراً ثالثاً ع على النحو التالي

سبواء كمانت المتضيرات العشبوائية س.، س.، س.، سن مستقلة أو غير مستقلة.

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان س، ص وعرّفنا متغيرا ثالثاً على النحو
 التالى:

وبشكل عام إذا كان لدينا مجموعة من المتغبرات العشوائية المستقلة س.، س.، س.ن وعرّفنا متغبرا جديدا ع على النحو التالى:

مثال ١

$$|\delta(d\omega)|^2$$
 ر $|\delta(d\omega)|^2$ ر $|\delta(d\omega)|^2$ ر $|\delta(d\omega)|^2$ ر و $|\delta(d\omega)|^2$ ر و $|\delta(d\omega)|^2$

$$= cmin(\frac{7}{7}) (1/7)^{7} + 7 (\frac{7}{7}) (1/7)^{7} + 7 (\frac{7}{7}) (1/7)^{7}$$

$$= \frac{\gamma}{\Lambda} + \frac{\gamma}{\Lambda} + \frac{\gamma}{\Lambda} + \frac{\gamma}{\Lambda}$$

$$= \frac{4}{\Lambda} + \frac{17}{\Lambda} + \frac{9}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda} + \frac{9}{\Lambda}$$

وإذا كانت د (س) = ٣ س ٢ + ١ فإن:

ت (د (س)) = ت (۴ س ۲ + ۱) = ت (۳ س ۲) + ۱ = ۳ ت (س ۲) + ۱

مثال ۲

أفرض أن المتغير العشوائي س له دالة كتافة إحتيال

صفر حس < ۱ ح (س) = ۲ س فيا عدا ذلك

ت (س) = ,] سح (س) د س

وإذا قرضنا أن د (س) = ٣ س٢ - ١ ، فإن

ت (د (س)) = . أ (٣ س - ١) ح (س) د س

(٣-٣-٢) دليل التباين

التباين هو العزم الثاني حول الوسط الحسمابي وهو أحمد مقاييس التشتت ونسرمز لدليل التباين بالرمز تبا Var ويعرّف التباين على النحو التالي:

$$=\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma}}_{(m)} = c^{\gamma} - \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} c^{\gamma} - c^{\gamma}}_{(m)} = c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} = c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} = c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} - c^{\gamma} = c^{\gamma} - c$$

$$\nabla^{\prime}\mu - \gamma = 1$$

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv = (w) c w$$

$$(r-r-10)$$
 $= \mu - \mu =$

وبشكل عام فإن التباين يعرف كما يلي:

$$^{V}(m) = \pi \mu = \pi (m)^{V}$$
 $= \pi \mu = \pi (m)^{V}$
 $= \pi (m)^{V} - (\pi (m))^{V}$

ويمكن تلخيص خواص دليل التباين على النحو التالي:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي س وضربنا كل قيمة من قيم هذا المتغير بالثابت أ
 فإن تبا (أسر) = أ" تبا (سر)

وبشكـل عام إذا كـان س، 6 س، 6 6 سن متغيرات عشــواثية مستقلة فان:

إذا كان التغيران العشوائيان س، ك س، غير مستقلين فإن

حيث تغا ترمز للتغاير بين س، 6 س، والتي يأتي بحثها مباشرة بعد دليل التباين

(٣-٣-٣) دليل التغاير

يعـــُر التغايــر عن مقدار الإرتبــاط بين س. ٤ س.، ويمكن تعــريفه عــلى النحو التالى:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$isi \; (v_{U},\; \delta \; w_{T}) \; = \; \frac{1}{2} \frac{1}{e^{\pi}} \; \frac{1}{2} \left((v_{U},\; v_{U}) \; \right) \; \left((v_{U},\; v_{U}) \; \right) \; \left((v_{U},\; v_{U}) \; \right) \; .$$

ح (س، = ر 6 س، = و)

("-"-17)

وفي حالة المتغيرات المتصلة فإذ:

ح (س، ک س،) دس، دس

(T-T-1A)

وبشكل عام فإنه يمكن كتابة تعريف التغاير على الصورة التالية:

وإذا كان سي ٤ سي مستقلين فإن

تغا (س، 6 س،) = صفر

إذا كان لدينا متغير عشوائي س فأن
 تغا (س 6 س) = تبا (س)

٢ _ إذا كان س، 6 س، متغيرين عشوائيين فإن:

تغا (اً س، ٤ ب س،) = أب تغا (س، ٤ س،)

٣_ إذا كان س متغيراً عشوائياً و أ قيمة ثابتة فإن
 تغا (س 6 أ) = صفر

ه - إذا كان س، ٤ س، متغيرين عشوائيين فإن معامل ارتباط بيرسون ρ بينها يعرف على النحو التالى:

$$\rho = \frac{\text{rid } (v_0, 2 \, v_7)}{\text{rid } (v_0, 1 \, \text{rid } (v_0, v_7))} = \rho$$

وإذا أخذنا عينة من أزواج القيم المتناظرة من مجتمعين مستقلين س 6 ص وكمانت أزواج القيم المتناظرة: (س, 6 ص,) 6 س, 6 ص.) 6 6 (س, 6 ص.) فإن معامل ارتباط بيرسون محسوباً من المشاهدات:

$$v = \frac{\frac{1}{v} + \frac{2v}{v} - (w_{x} - w)}{\frac{1}{v} + \frac{2v}{v} - (w_{x} - w)} = v$$

الفصل الرابع

الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function

بالإضافة إلى أهمية العزوم في قياس الإلتواء والتفرطح فإنـه بمكن تحديـد كثافـة الاحتيال لمتغير معين إذا علمنا كل أو بعض عزوم هذا المتغير.

فإذا كان لدينا متغير عشوائي س دالة كثافة احتياله ح (س) فإن القيمة المتوقعة للمقدار هم^{ت س} يسمى الدالة المولدة للعزوم إذا كانت هذه القيمة المتوقعة موجودة في فترة ما ـ $\mathbf{U}^* < \mathbf{v} < \mathbf{v}^*$ وسوف نرمز للدالة المولدة للعزوم بالرمز 14 (ت) حيث أن:

فى حالة المتغيرات المتقطعة

وفي حالة المتغيرات المتصلة

$$(-1.5 - 1.7) = \frac{1}{2} = (-1.5) \mu$$

فإن وجدت الدالة المولدة للعزوم فإنها تكنون قابلة للتضاضل في الضترة المحيطة ينقطة الاصل وإذا فاضلنا هذه الدالة و مرة بالنسبة لـت فإننا نحصل على :

في حالة المتغيرات المتقطعة.

في حالة المتغيرات المتصلة.

وبوضع ت = صفر فإن

$$(\tau_{-} \xi_{-} \tau_{1})$$
 $(\tau_{-} \xi_{-} \tau_{1})$ $(\tau_{-} \xi_{-} \tau_{1})$ $(\tau_{-} \xi_{-} \tau_{1})$ $(\tau_{-} \xi_{-} \tau_{1})$

في حالة المتغيرات المتقطعة.

في حالة المتغيرات المتصلة.

ويمكن الحصول على العزوم بإيجاد مفكوك الدالة المولدة للعـزوم وذلك بـالنعـير عنها بدلالة قوى ت التصاعدية على النحو التالى:

$$\mu \ (\bar{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i c^2}{e_i} = e_i c^2 = e_i c^3 = e_i$$

في حالة المتغيرات المتقطعة.

$$\mu \ (\overline{x}) = \sum_{\infty} \int_{\infty}^{\infty} e^{-t/2} - \int_{\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac$$

في حالة المتغيرات المتصلة.

وإذا اخترنا ت في الفترة - ل ّ < ت < ل ّ بشكل يجعل المتسلسلة تقاربيـة تقارباً مطلقاً فإن:

معامل
$$\frac{c}{1!}$$
 هو العزم الأول حول الصفر $\frac{c}{1!}$ معامل $\frac{c}{1!}$ هو العزم الثاني حول الصفر $\frac{c}{1!}$ هو العزم الثاني حول الصفر

وهكذا.

إذا اعتبرنا دالة كثافة إحتمال بواسون فإن الدالة المولـدة للعزوم ومفكـوكها يمكن كتابتها على النحو التالى:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \left(\dots + \frac{\partial}{\partial t} \left(\dots + \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) = \frac{\pi}{\partial t} e^{-\frac{1}{2}}$$

والعزم الواوي حول الصفر عير' هو معامل
$$\frac{r'}{e!}$$
 ، أي أن $\frac{\partial}{\partial r}$. $\frac{\partial}{\partial r}$. $\frac{\partial}{\partial r}$. $\frac{\partial}{\partial r}$

$$\frac{\theta}{t!} = \frac{\theta}{t-1} e^{\tau} e^{-\theta} \frac{\theta t}{t!}$$

$$\frac{\theta}{t} = \frac{\theta}{t}$$

$$\mu' = \frac{\theta}{t_{1}} e^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3}}$$

وياستخدام العلاقات (٧-٢-٣) 6 (٨-٢-٣) و (٩-٢-٣) ومن ثم التعويض في (١٠-٣-٣) فإن:

$$\frac{1}{\theta \sqrt{1 - \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta}}}} = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta}} = \sqrt{\beta}$$

وإذا عوضنا في (٢٢ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\gamma + \frac{1}{\theta} = \frac{(\theta \gamma + \gamma)\theta}{\theta} = \gamma \beta$$

$$r = \sqrt{\beta}$$

أي أن شكل التوزيع يقرب من التوزيع الطبيعي كلها زادت قيمة $oldsymbol{ heta}$.

$$\theta > 0$$
 صفر $\theta < 0$ صفر فيما عدا ذلك

$$ij(\mu) = \int_{-i\pi}^{i} \int_{\theta}^{i\pi} d\pi$$

$$=\frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\overline{v} \cdot \overline{v}}{1 + \overline{v}} + \frac{\overline{v} \cdot$$

$$\frac{\theta}{Y} = \frac{1}{100} \int_{0}^{\theta} \int_{0}^{100} \int_{0}^{100$$

$$\mu_{\gamma} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{w^{\gamma}}{\gamma} \right] \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{w^{\gamma}}{\gamma} \right]_{0,1}^{0}$$

$$\mu' = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} \left[\frac{\theta}{\theta} \right] \right] = \frac{\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

$$\mu'_{i} = \frac{\theta}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} \left[\frac{\theta}{\theta} \right] = \frac{\theta}{\theta} \left[\frac{\theta}{\theta} \right] = \frac{\theta}{\theta}$$

وباستخدام العلاقات (٧ ـ ٢ ـ ٣) 6 (٨ ـ ٢ ـ ٣) و (٩ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\mu_r = \frac{\theta^r}{\gamma r} \lambda \mu_r = -\frac{\theta^r}{\Lambda} \lambda \mu_3 = \frac{\theta^3}{\gamma r}$$

وبالتعويض في (١٠ ـ ٣ ـ ٣) فإن

$$\overline{r} \vee r - = \frac{\frac{r\theta}{\Lambda}}{r(\frac{1}{\Lambda})} = \beta$$

$$1, \Lambda = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1+\theta}}$$
 $\div \frac{\theta}{\Lambda^*} = \sqrt{\theta}$ فإن $\theta = \sqrt{1+\theta}$

أسئلة وتمارين (٣)

(١ - ٣) الجلول التالي بيينَ توزيع ١٠٠ أسرة في مدينة ما حسب عـدد أفراد الأسرة اعدد أفراد الأسرة (٤ / ٢٠٤٤) . . . ١٥٠٠

۰۵۰۰۰۵۱ عدد الأسر	عدد أفراد الأسرة
3	Y
14	1 °
14	٤
۴٠	٥
10	٦
14	٧
٧	A
1	المجموع

والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع التكراري وعرض بيانات التوزيعين بأشكال هندسية مناسبة.

(٣-٣) الجدول التكراري التالي يبين توزيع أسابيع سنة ١٩٨٤ (وعددها ٥٢ أسبوعاً) حسب عدد حوادث العمل التي وقعت في الأسبوع في مصنع معين:

عدد الأسابيع	عدد حوادث العمل في الأسبوع 	
**	صفر	
٨	1	
٤	*	
٣	٣	
1	٤ فأكثر	
70	المجموع	

والمطلبوب:

١ _ إيجاد التوزيع الاحتمالي.

٢ ـ رسم التوزيع الاحتمالي وبيان كيفية تحويله إلى مدرج تكراري.

٣ - إيجاد التوزيع التكراري المجتمع الصاعد والتوزيع التكراري
 المتجمع الهابط ورسم كل منها.

إيجاد التوزيع الاحتمالي المتجمع لصاعد والتوزيع الاحتمالي المتجمع الهابط ورسم كل منها.

وإذا اعتبرنا أي أسبوع من أسابيع سنة ١٩٨٥ وفـرضنا أن ظـروف العمل في هذه السنةبقيت على ما كانت عليه سنة ١٩٨٤، أوجد:

١ _ احتمال أن يكون من الأسابيع التي لا يقع فيها حوادث عمل.

٢ .. احتيال أن يكون من الأسابيم التي يقم فيها حادثين فأكثر.

٣ _ احتمال أن يكون من الأسابيع التي يقع فيها أقل من حادثين.

إحتيال أن يكون من الأسابيع التي يقع فيها أكثر من حادث واحمد
 وأقل من ٤ حوادث.

(٣ ـ ٣) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي س على النحو التالي:

ح (س) = س عهرا - 1⁄2 س) ۱ < سر < ۲

= صفر فيا عدا ذلك

والمطلوب:

١ - حساب قيمة الثابت ك

٢ _ رسم دالة كثافة الاحتيال

٣ _ إيجاد دالة الاحتيال التجميعي ورسم هذه الدالة

(٤ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال:

$$- (س) = 1$$
 صفر $- (m)$ صفر $- (m)$

صفر فيها عدا ذلك

أوجسد:

١ .. قيمة الثابت أ، ومن ثم ارسم دالة كثافة الاحتيال.

۲ - ح (س < 1/)

٣_ القيمة المتوقعة للمتغير س

٤ ـ الوسيط للمتغير س

٥ .. دالة الاحتمال التجميعي للمتغير س ومن ثم ارسم هذه الدالة.

(٥- ٣) اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٣١ أسرة من بين الأسر التي تقطن في منطقة معينة وقد تبيزُ أن التوزيع التكراري للدخول الشهوية للأسر في العينة كما يل:

عند الأسر	فثات الدخل الشهري بالدينار	
1.	7	
17	4 4	
٦٤	***-**	
1٧	3 * * _ £ * *	
18	70	
171	المجموع	

والمطلوب:

١ ـ رسم المدرج التكراري.

٢ _ إيجاد التوزيع الاحتهالي، ومن ثم رسم هذا التوزيع.

٣- إيجاد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والتوزيع التكراري المتجمع
 الهابط ورسم كل منها.

 إيجاد التوزيع الاحتمالي المتجمع الصاعد والتوزيع الاحتمالي المتجمع الهابط ورسم كل منها.

وإذا اخترنا عشوائياً أسرة واحدة من هذه العينة:

١ _ ما احتمال أن تكون من الأسم التي يزيد دخلها عن ٤٠٠ دينار

٢ .. ما احتمال أن تكون من الأسر التي يقل دخلها عن ٤٠٠ دينار

٣ـ ما احتمال أن تكون من الأسر التي لا يقل دخلها عن ٢٠٠دينار ولا يزيد
 عز ٤٠٠ دينار

(٦ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع احتمالي على الشكل التالي:

أوجسد:

(٧ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الاحتيال

أوجسدن

(٨ ـ ٣) إذا كان المتغير س يأخذ القيم - ٢ ك ٥٢ ٣ باحتمالات

التوالي
$$\frac{1}{\gamma}$$
 ه $\frac{1}{\gamma}$ ه التوالي

(٩ ـ ٣) إذا كان لدينا الدالة

د (س) =
$$\frac{1}{q}$$
 س^۲ صفر < س < ۳ فيا عدا ذلك = صف

١ ـ أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمال ثم أوجد دالة الاحتمال التجميعي.

٢ ـ أرسم دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعي.

٣ ـ أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغير س.

(١٠ ـ ٣) إذا كان المتغير س له دالة كثافة الاحتيال:

١ _ أوجد داله الاحتيال التجميعي

 (m^3) ک ت (m^3) ک ت (m^3)

٣ ـ أوجد معاملي الالتواء والتفرطح .

(١١ ـ ٣) إذا كان الطلب اليومي س على سلعة ما (بالمئة كيلوغرام) يتبع تـوزيعاً بدالة
 كثافة احتال.

وأراد صاحب بقالة أن يطلب ١٠٠ ل كفم من هذه السلعة، أوجد قيمة ك التي تجعل الأرباح بهاية عظمى إذا كان يشتري الكيلوغرام الواحد بستة قروش ويبيعه بعشرة قروش.

(٣ - ١٢) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثالة الاحتيال:

$$\alpha > \infty$$
 صفر $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ هـ $\alpha = \infty$ صفر $\alpha < \infty$ صفر $\alpha > \infty$

(يسمى المتغير الذي له دالة كثافة الاحتيال على هذا الشكل Weibul random لكثير من ويسمى المتغير هذه الدالة غوذجاً جيداً لتوزيع فترة البقاء Length of Life لكثير من الأدوات الكهر مائية والميكانيكية والنباتات والحيوانات)

أوجد القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع إذا علم أن م = ٢

أوجمد الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى لهذا المتغبر

(١٤ ـ ٣) إذا كان المتغير س له دالة كثافة احتيال

١ .. أوجد قيمة الثانث أ

٢ ـ أوجد دالة كثافة الاحتيال

٣ ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعي

٤ ـ أرسم كلًا من دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعي.

٥ ـ أوجد ح (صفر < س ≤ ٥٠٠)

٦ - أوجد ح (س > ٥,٥ | س > ١٠,٥)

الباب الرابع

التوزيعات الإحصائية Statistical Distributions

تقسم التوزيعات الإحصائية إلى مجموعتين:

Discrete Statistical Distributions

أولًا: توزيعات إحصائية متقطعة

Continuous Statistical Distributions

ثانياً: توزيعات إحصائية متصلة

وسوف نبدأ بدراسة التوزيعات الإحصائية المتقطعة.

الفصل الأول

التجارب المتكررة المستقلة وغير المستقلة Repeated Independent and Dependent Trials

التجارب المتكررة المستقلة هي التي تُجرى تحت نفس الظروف واحتهال الحصول على صفة معينة لا يتغير من تجربة إلى أخرى. أما التجارب المتكررة غير المستقلة فهي التي تجرى تحت ظروف مختلفة واحتهال الحصول على صفة معينة في تجربة ما يختلف عن احتمال الحصول على نفس الصفة في تجربة أخرى. وتسمى التجارب المتكررة المستقلة في تخير من الأحيان المعاينة مع الإعادة Sampling with Replacement أما التجارب المتكررة غير المستقلة فإنها تسمى المعاينة بدون إعادة Replacement فإذا كان يوجد كيس به ن كرة متماثلة منها ن، كرة بيضاء، ن، كرة هراء، ن، كرة خضراء وسحبنا كرة عشوائياً ثم أعدناها إلى الكيس بعد تسجيل لونها فإن التجارب في هذه الحالة تسمى تجارب متكررة مستقلة واحتمال الحصول على لون معين لا يختلف من تجربة إلى أخرى، أما إذا سحبنا كرة من الكيس وسجلنا لونها ووضعناها جانباً قبل سحب الكرة الثانية فإن هذا النوع من التجارب يسمى تجارب متكررة غير مستقلة واحتمال الحصول على لون معين غتلف من تجربة إلى أخرى لأنه متكررة غير مستقلة واحتمال الحصول على لون معين يغتلف من تجربة إلى أخرى لأنه متكررة غير مستقلة واحتمال الحصول على لون معين يغتلف من تجربة إلى أخرى لأنه يعتمد على ما يظهر من التجارب السابقة وعدد الكرات الباقي في الكيس.

ويمكن حساب إحتمال التماثيج لهذه التجارب المتكررة باستخدام المبادىء الأساسية في علم الاحتمال، إلا أنه يمكن إيجاد قانون عام يعطي احتمال أي من هذه النتائج بمجرد التعويض فيه.

(١ - ١ - ٤) إيجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة المستقلة قانون ذي الحدين أو توزيع ذي الحدين عانون ذي الحدين Binomial Distribution إذا أجرينا تجربة معينة وكانت نتيجة هذه التجربة وقوع حادث بـاحتهال ح أو إن عمدد الطرق التي يقع فيها الحبادث رمرة في ن تجربة يسماوي فقر، فإذا اعتبرنا الحالة التي يقع فيها الحادث في كل تجربة من التجارب الأولى التي عددها رولا يقع في كل تجربة من التجارب التالية وعددها ن – رفإن احتبهال الحصول عملي هذه الحالة هو:

$$\frac{\langle (7 \times 7 \times ... \times 7) \times (1 - 7) (1 - 7) \dots (1 - 7)}{\langle (7 \times 6) \times (1 - 7) \times (1 - 7) \times (1 - 7)}$$

$$= 5^{\circ} (1 - 7)^{\circ - 1}$$

وبما أن عدد الطرق التي يقع فيها الحادث تشكل حالات متنافية ومتماثلة فإن الاحتمال المطلوب يمكن صياغته على النحو التالى:

$$(1-1-3)^{c-c}$$

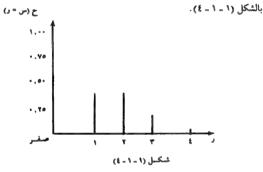
حيث س ترمز لمتغرر ذي الحدين وهو عبارة عن عدد مرات وقوع الحادث.

نتائج وخىواص:

- 1 _ إذا اعتبرنا المقدار $\{-+(1--)\}^c$ حيث ن عدد صحيح موجب فإن الحد الذي ترتيبه ر + 1 في مفكوك هذا المقدار هو قرح $(1--)^{c-1}$ وهو الاحتبال الذي حصلنا عليه في صيغة توزيع ذي الحدين ومن هنا نشأت تسمية هذه الصيغة الاحتبالية بالقانون الاحتبالي ذي الحدين.
- ٢ ـ عدد مرات وقوع الحادث يأخذ القيم صفر أو ١ أو ٢ أو . . . أو ن وهي حالات
 متنافية وشاملة .

٣ـ دالة الاحتيال لتوزيع ذي الحدين تعتمد على ثابتين Constants أو معلمتين
 ٢ Parameters ح، ن، ويتغييرهما فإننا نحصل على أشكال مختلفة لهذا التوزيع.
 فإذا فرضنا أن ح = ٢, ٤٠٥ ن = ٤ فإن التوزيع الاحتيالي في هذه الحالة هو:

ودللة الاحتيال في هذه الحالة تكون ملتوية ناحية اليمين كما هــو مبين

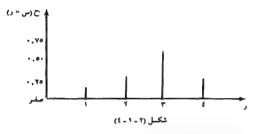


أما إذا كانت ح = ٧, ٠ ٥ ن = ٤ فيان التوزيع الاحتيالي في هذه الحالة

	-
ح (س = ر)	ر
ئق. (۷, ۰) (۲, ۰) = ۱۸۰۰, ۰	٠
ئن، (۲, ۰) (۴, ۰) = ۲۰۷۰, ۰	١
^ا ق، (۲,۰) ٔ (۲,۰) ٔ = ۱۶۲۲,۰	*
ئن، (۲, ۰) الله عنه الله على الله عنه الله على الله عنه الله عنه الله عنه الله عنه ا	۳
ئق؛ (٧, ١) ؛ (٢, ١) = ١٠٤٢, ٠	٤
1,	المجموع

هو:

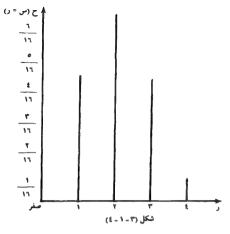
ودالة الاحتمال ملتوية ناحية اليسار كما هو مبين بالشكل (٢ ـ ١ ـ ٤)



إذا كانت ح = ب/ فاح (س = ر) = ح (س = ن - ر)، وهــذا يعني أن الدالة متهائلة، فإذا كانت ح = ب/ ن = ٤ فإن التوزيع الاحتهالي هو:

$$\frac{1}{3} \cdot (\gamma')^{3} (\gamma')^{3} = \frac{1}{\Gamma \Gamma}$$

ودالة الاحتمال متماثلة حول ح (س = ٢) كما هو مبين في الشكل (٣-١-٤)



تهالي هو:

أما إذا كانت ح = 1⁄4 ك ن = ٥ فإن التوزي	
ح (س = ر)	ر
$\frac{1}{r\gamma} = {}^{\circ}(/\!\!/) \cdot (/\!\!/\gamma).\dot{o}^{\circ}$	•
°ق، (۲٪) ' (۲٪) = ۲۳	١
$^{\circ}\tilde{c}_{r}(\gamma)^{\tau}(\gamma)^{\tau} = \frac{r}{\gamma \gamma}$	4
$\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	۲
$^{\circ}$ \tilde{c}_{1} $(\gamma')^{1}$ $(\gamma')' = \frac{\alpha}{\gamma \gamma'}$	1
¹ ق (۲۷) ° (۲۷) ° ق	4
	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\gamma} \cdot (\gamma') \cdot (\gamma') \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{1}$

ودالة الاحتمال متماثلة حول ح (س = ٣) 6 ح (س = ٤) كما هو مب الشكل (٤ ـ ١ ـ ٤)



ه _ إذا أجرينا تجربة برنوللي مرة واحدة فإن المتغير س في هذه الحالة يـأخذ القيمة ١
 (وقوع الحادث) باحتمال ح أو القيمة صفر (عدم وقوع الحادث) باحتمال (١ - ح)
 وفي هذه الحالة فإن:

$$(1 - 1 - 1)^{-1}$$
 = $(-1 - 1)^{-1}$ = $(-1 - 1)^{-1}$ = $(-1 - 1)^{-1}$ ويسمى هذا التوزيع Point Binornial

- إذا كانت ن كبرة وكانت ح ، ١ ح غير قريبتين جداً من الصفر فإنه بمكن
 تقريب توزيع ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي وسوف ندرس هذا التقريب عندما
 نأت إلى التوزيع الطبيعي .
- ٧ للنوال لتوزيع ذي الحدين هو القيمة التي تجعل المقدارح (س = ر) نهاية
 عظمى، ويمكن تحديد قيمة المنوال على النحو التالي:

إذا فرضنا م، ك هما القيمتين العملدية والكسرية للمقدار (ن + 1) ح فـإن قيمة دالة الاحتيال لهذا التوزيع تكون أكبر ما يمكن إذا كمانت س=م وعلى هـذا فإن م هي القيمة المنوائية. ومشالاً على ذلك إذا كانت ن = V، σ = σ . • فـإن σ (σ + 1) σ = σ . • σ . • المنوال = σ .

معاملات توزيع ذي الحدين ومثلث باسكال:

Coefficients of the Binomial and Pascal's Triangle:

١ _ عدد الحدود في هذا المفكوك هو ن + ١

٣ ـ مجموع قوى ح و (١ - ح) يساوي ن.

المعاملات منهائلة تزداد قيمتها باتجاه منتصف المتسلسلة وتتناقص بعد ذلك، فإذا فرضنا أن ن = ١٠ فإنه يمكن وضع معاصلات مفكوك ذي الحدين للمقدار ح +
 (١ - ح) في مثلث باسكال على النحو التالى:

المجموع	معاملات ذي الحدين	عدد مرات اجراء التجربة
Y	1 1	1
٤	1 Y 1	٧
٨	1 7 7 1	۳
17	1 3 7 3 1	٤
**	1 0 1. 1. 0 1	a
3.5	1 7 10 7 10 7	7
114	1 . A . A1 40 40 41 A	1 v
707	AY FO . V FO AY A	A 1 A
017	1 4 47 47 177 177 48 77	4 1 4
1 - 7 2	1 1. 20 17. 71. 707 71. 17. 8	0 1. 11.

ويلاحظ أن كل قيمة في هذا المثلث عبارة عن حاصل جمع القيمتين على زاويتيها في السطر السابق مباشرة.

المزوم ومعاملي الالتواء والتفرطح لتوزيع ذي الحدين

$$(7-1)(7-1)(7-1) = 5$$

$$\{(z-1)z^{-1}\}(z-1)z^{-1}+(z-1)^{T}z^{T}$$

وإذا عـوضنا عن العـزوم حول الـوسط الحسابي في العـلاقتـين (١٠ ـ ٢ ـ ٣)، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\beta_{i}^{7} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7} - C^{7}}{C^{7} - C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7}}{C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7}}{C^{7}} = \frac{C^{7} - C^{7}}{C^{7}} = \frac{C^{7}}{C^{7}} = \frac{C^{7}}{C$$

$$8_{v} = \frac{\frac{4 c^{2} c^{2} (1-c)^{2} + c^{2} c^{2} (1-c)}{c^{2} c^{2} (1-c)^{2}}}{c^{2} c^{2} c^{2} c^{2} c^{2} c^{2}} = \sqrt{8}$$

$$y_{\gamma} = - ضفر إذا كانت ح $y_{\gamma} = - y_{\gamma}$$$

 $eta_i
ightharpoonup - \infty$ حيث ح ثابتة وغير قريبة جداً من الصفر كها أن $eta_r
ightharpoonup - \infty$ حيث ح ثابتة وغير قريبة جداً من الصفر

القيمة المتوقعة والتباين لنسبة مرات وقوع الحادث:

نسبة مرات وقوع الحادث هي لي حيث رعدد مرات وقوع الحادث، ن عدد مرات إجراء التجربة:

$$c\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{c}{c} = c\left(c\right) = \frac{c}{c} = c$$

$$(3-1-3) \frac{1}{3} = \frac{3}{3} (3-1-3) = \frac{3}{3} (3-1-3) = \frac{3}{3} (3-1-3)$$

Fitting a Binomial

توفيق توزيع ذي الحدين

إذا وجد أنه من المناسب توفيق توزيع ذي الحدين لبيانات متغير معين، فإنه يلزم تحديد قيم ثوابت التوزيع من واقع البيانات المتوفرة وبالتالي التكرارات النسبية والمطلقة المقابلة لقيم هذا المتغير. أما اختبارات جودة المطابقة فإننا ندرسها مع تطبيقات توزيع كاي تربيع.

مثال:

إذا كان لدينا البيانات التالية عن عدد الأولاد الذكور في ١٠٠ عــاثلة حجم كل منها ٥ أفراد.

عدد العائـلات	عدد الذكور
٧	•
1A	1
YA	*
۲V	٣
10	٤
٥	٥
1	المجموع

فإنه يمكن توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات كها هو مبين في الجدول التالي مع العلم بأن احتهال أن يكون المولود ذكراً (ح) يساوى ﴿ وَان ن = ٥

عدد العائلات المتوقع	ح (س = ر)	عدد العائلات المشاهد	ر
Y = 1 × 1 **	ن. (۱۲) (۱۲)° = ۲۲	٧	4
17 = 0 × 100	·ق، (۱۰٪) (۱۰٪) = ۱۰٪	14	١
$L_{I} = \frac{L_{I}}{I \cdot a} \times I \cdot a$	1. " = " (//r) " (//r) ro"	, , ,	Y
41 = 44 × 100	1. = "(\\r) "(\\r) ro"	, , , , , ,	٣
17 = 0 × 100	Ez (*/)3 (*/)1 = 0	, 10	٤
L = LL × /	<u> ۱</u> ق. (۲۷)° (۲۷)° = ۲ ۲۱ .	٥	٥

جدول توزيع ذي الحدين:

جدول رقم (١) يبين التوزيع الاحتمالي لمتغير يتبع توزيع ذي الحدين عنــدما ن = ٢ ° ٢ ° ٠ . . . 6 ° م وقيم مختارة للمعلمة ح.

تمارين محلولة على توزيع ذي الحدين:

غرين (١)

إذا وجد اضبارة بها ٢٥٠ فاتورة من بينها ٥ فواتير بهـا أخطاء، واختــار فاحص الحسابات عشوائيًا ٤ فواتىر من هذه الاضبارة، أوجـــد:

- 1 _ احتمال أن يوجد أخطاء في الفواتير الأربعة.
- ٢ _ احتمال أن يوجد اخطاء في فاتورة واحدة على الأقل.

وإذا اخترنا عشىوائياً ١٠٠ فـاتورة من هـذه الإضبارة، أوجـند القيمـة المتوقعـة والتباين لعدد الفواتير التي بها أخطاء.

الحسال:

وإذا رمزنا لعدد الفواتير التي بها أخطاء بالرمز س فإن:

غریسن (۲):

إذا كمان احتمال وجمود عيب في وحدة من إنشاج آلة معينة هو ٥٠,٠ واخترنا عشوائياً ٥ وحدات من إنتاج هذه الآلة، أوجمه:

١ _ احتمال عدم وحود عيب في جميع الوحدات المختارة.

٢ _ احتيال وجود عيب في وحدتين من الوحدات المختارة.

٣_ احتمال وجود عيب في وحدة واحدة على الأكثر من الوحدات المختارة.

الحيان

إذا رمزنا لعدد الوحدات التي يوجد بها عيب بالرمز س فإن:

- 3VVP. -

غريـن (٣):

أثبتت الخبرة السابقة أن نسبة صفحات اليومية التي تحتوي على أخطاء لـ دى

' شركة معينة هي ٥/ فإذا أخذ مكتب مراجعة عينة مكونة من ٣ صفحات من دفـتر يومية هذه الشركة، أوجــد:

١ _ احتمال أن يجدها جميعاً بدون أخطاء.

٢ _ احتيال أن يجد أخطاء في صفحة واحدة على الأقل.

الحسل:

إذا رمزنا لعدد صفحات اليومية التي بها أخطاء بالرمز س، فإن:

غريسن (٤):

في استقصاء للرأي العام في أحد المجتمعات، وجمد أن نسبة من يـوافقون عـل حل لمشكلة معينة هي 7,1°، أوجـد:

١ _ احتيال أن نجد في عينة من ٥ أشخاص ثلاثة منهم يوافقون على هذا الحل.

٢ - احتمال أن نجد في عينة من ٤ أشخاص واحداً منهم على الأقبل يوافق عبل هذا
 الحل .

٣ القيمة المتوقعة والتباين لعدد من يوافقون على الحل المذكور في عينة من ١٠٠ شخص.

٤ ـ القيمة المتوقعة والتباين لنسبة من يوافقون على الحل المذكور في عبنة من ٥٠ شخص.

الحسل:

إذا رمزنا لعدد الأشخاص الذين يوافقون على الحل المذكور بالرمز س فإن:

· , 478 {= · , · 707 - 1 = {(· , {(·)} (· , 1.) . 5 - 1 =

$$\begin{array}{ccc}
\dot{\mathbf{c}} & (\zeta) & (\zeta)$$

(٢ - ١ - ٤) تعميم قانون ذي الحدين إلى توزيع متعدد الحدود

Multinomial Distribution

(8-1-0) .

إذا أجرينا تجربة معينة وكانت نتيجتها أحد الحوادث أرك أرك . . . أ باحتمالات ح، 6 ح، 6 . . . 6 ح. على التوالي وأجرينا هذه التجرية ن مرة مستقلة ورمزنا لعدد مرات ظهـور الحادث أ. بـالرمـز س. والحادث أ. بـالرمـز س. ٢ . . . ٥ والحادث أر بالرمز س, فانه يمكن كتابة قانون التوزيع متعدد الحدود على النحو التالى:

$$= (w_{i})^{2} = (v_{i})^{2} + (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} + (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} + (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} + (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2} + (v_{i})^{2} = (v_{i})^{2}$$

حيث ن، + ن، + بن = ن

مثبال:

إذا كان لدينا كيس به ٦ كوات بيضاء، ٤ كوات حراء، ١٠ كوات خضراء وسحنا ١٠ كرات متنالية بحيث تعاد الكرة إلى الكيس بعد تسجيل لونها، فإنــه يمكن إيجاد احتمال الحصول على ٣ كرات بيضاء، ٢ كرة حراء، ٥ كرات خضراء على النحو التالي:

وإذا رمزنا لعدد الكرات البيضاء بالرمز س وعدد الكرات الحمراء بالرمز س وعدد الكرات الخضراء بالرمز س فإن:

ويسمى أحياناً بالتوزيع الاحتهالي للحوادث النادرة، فكثيراً ما يتفق مثلاً مع توزيع المساحات الصغيرة التي تقسم إليها شريحة عليها عينة من الدم بحسب عدد كرات الدم البيضاء، أو توزيع المساحات الصغيرة التي يقسم إليها لوح زجاجي بحسب عدد الحجارة الرملية التي تحتوي عليها المادة الزجاجية، أو عدد السيارات التي تمر في الدقيقة من مكان معين وفي وقت معين خلال اليوم، أو عدد المكالمات التلفونية التي ترد على لوحة استقبال خلال فترة زمنية قصيرة جداً في الفترة الواقعة ما بين الساعة الثي ترد على عيادة الطوارىء في مستشفى معين في الفترة الواقعة ما بين الساعة الشامنة صباحاً والثانية بعد الظهر... الخ.

حيث θ معلمة التوزيع (الوسط الحسابي)

ويمكن استنباط هذه الصيغة الإحتهالية من قانون التوزيع الإحتمالي ذي الحمدين على النحو التالى:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\theta}{y} - 1 \right)^{2} \left(\frac{\theta}{y} \right)_{j,j} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{y} \right)^{2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} d$$

$$\int_{-\delta}^{-\delta} \left(\frac{\theta}{\delta} - 1 \right)^{2} \left(\frac{\theta}{\delta} \right) \frac{(1+j-\delta) \dots (1-\delta) (1-\delta) \delta}{! j} \underbrace{ \left(\frac{\theta}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right)^{2} }_{\infty \leftarrow \delta} = 0$$

$$\frac{(1+j-i)\dots(1-i)i}{i} \frac{\partial}{\partial x_{k-i}} = \frac{\partial}{\partial$$

$$\left(\frac{\theta}{\upsilon}-1\right) \left(\frac{\theta}{\upsilon}-1\right) \left(\frac{\theta}{\upsilon}-1\right)$$

$$r\left(\frac{\theta}{0}-1\right)\bigsqcup_{\infty \leftarrow 0} \frac{1+j-0}{0} \cdots \frac{1-0}{0} \cdot \frac{0}{0} \bigsqcup_{\infty \leftarrow 0} \frac{\partial \theta}{\partial j} = 0$$

$$o\left(\frac{\theta}{0}-1\right)\bigsqcup_{\infty \leftarrow 0} \frac{\partial \theta}{\partial j}$$

وهي نفس الصيغة المطاة في (٦ ـ ١ ـ ٤)

العزوم ومعاملي الإلتواء والتفرطح لتوزيع بواسون

باستخدام المعادلات (٢ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \circ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$u_{\lambda} = \frac{1}{1-\alpha} c_{\lambda} e^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha}} = 0 + \theta_{\lambda}$$

$$u_{y}' = \frac{1}{2} \int_{y}^{\infty} (y^{2} - \frac{\theta^{2}}{2})^{2} dy + y = \frac{\theta^{2}}{2} + y + y = \frac{\theta^{2}}{2} + y$$

$$\mu'_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{i}} c^{i} \leftarrow \frac{\partial}{\partial x_{i}} c^{i} + r \theta^{T} + r$$

$$\mu_{r}=$$
 صفر ک $\mu_{r}=\theta$ ک $\mu_{r}=\theta$ ک $\mu_{3}=\theta$ ($t+\tau\theta$)

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\mathbf{r}\theta}{\mathbf{r}\theta} = \mathbf{r}\beta$$

$$alpha_{\tau} = \frac{\theta(t+\tau)\theta}{\theta^{\tau}} = \tau + \frac{1}{\theta}$$

$$_{i}$$
 يلاحظ أن $_{i}$ ن مسل $_{i}$ $_{i}$

$$\left(\frac{1}{\zeta^{i}} + r\right) \bigsqcup_{m \leftarrow i} r = \left(\frac{1}{\theta} + r\right) \bigsqcup_{m \leftarrow i} r$$

$$r = \sqrt{\beta} \bigsqcup_{m \leftarrow i} r^{i} \text{ of } q^{i}, r =$$

Fiting a Poisson Distribution

توفيق توزيع بواسون

إذا كان لدينا بيانات عن حادث نادر الوقوع فإنه يتوقع أن يكون عـدد مرات وقوع هذا الحادث متغيراً له توزيع بواسون، ولتوفيق هذا التوزيع للبيانات المعطاة فإنه يلزم تحديد قيمة الثابت θ (متوسط التوزيع) وبالتـالي التكرارات النسبية والمطلقـة المقبلة لقيم المتغير.

مثال

إذا كـان لدينــا التوزيــع التكراري التــالي لحوادث العمــل التي وقعت لـ ٣٠٠٠ عامل في مصنع معين خلال سنة معينة.

عدد العال	عدد الحوادث
177.	•
173	1
331	٣
**	٣
0 Y	٤
17	٥
	7
Y	

فإنه من الواضح أن حوادث العمل من الحوادث النادرة ويمكن تـوفيق توزيـع بواسون لهذه البيانات على النحو التالي:

الوسط الحسابي 6 لهذا التوزيع

٠,٦٥ =

حلد العيال المتوقع	ح (س=ر)	مدد المإل المشاعد	ı
1.88 = 4 × 4.	· ! = Y70, .	177.	•
$TVA = Y \cdot \cdot \cdot \times \cdot , YYQ$	4-07, '(07, *)' = PTT, *	247	١
44. = 4 × . * 11.	$\frac{\Delta^{-or, \cdot}(or, \cdot)^{\top}}{\gamma !} = \cdot tt, \cdot$	188	۳
\$A = Y • • • × • , • Y §	·,·YE = \(\frac{Y(\cdot,\sigma)^{\cdot,\sigma}}{Y!}	AA	۳
V = 4 ×	4, *** = 3 ***, **	98	٤
7= 7*** × * , ** }	0 !	111	٥
صفر×۲۰۰۰ = صفر	ه ^{-۱۰} ۲۰ (۲۰, ۱۰) ₌ صفر		٦
Y		4	

جدول توزيع بواسون

جدول رقم (٢) يبين التوزيع الإحتيالي المتجمع الصاعد لتوزيع بواسون. وقد اخترنا قيم θ بين 0, 0, 0 بين كل قيمة والقيمة السابقة لهـا فإذا كان المطلوب حسابه هو ح (0 = ٢) إذا كانت θ = ١ فإن

أما ح ($m \leq (r)$ ، إذا كانت قيمة θ معلومة، فإنه يمكن إيجاده مباشرة من الجدول المذكور.

تمارين محلوله على توزيع بواسون

غرين (١)

إذا كان متوسط عدد المكالمات التي ترد على لوحة استقبال في شركة معينة خلال

الفترة من العاشرة صباحاً حتى الثانية بعد الظهر هو ٣ مكالمات في الدقيقة، أوجد:

١ _ احتمال عدم ورود مكالمات في دقيقة واحدة خلال الفترة المذكورة.

٢ _ احتيال ورود مكالمة واحدة على الأقل في دقيقة واحدة خلال الفترة المذكورة.

الحل

إذا رمزنا لعدد المكالمات التي ترد على لوحة استقبال خلال الفترة المذكورة بالرمز س فإن:

$$A^{-7} = A^{-7} = A$$

غرين (٢)

إذا كان عدد الحجارة الصغيرة في السنتيمتر المربع الواحد في تركيب ١٠٠ لـوح زجاجي من نوع معين يتبع توزيع بواسون بمسوسط ٣٠٠، المطلوب حساب التوزيــع التكراري المتوقع لعدد الحجارة الصغيرة.

		الحل
هدد الألواح الزجاجية المتوقع		عدد الحجارة الصغيرة (د)
	ح (س = ۱) = هـ ۲۰۰۰ (۲۰۰۳) = ۲۵۷۰ م	•
	ح (س = ۱) = مراه ، ۱۱ = ۲۲۲ . • ۲۲ . • ۲۲	١
$T, T = 1 \cdots \times \cdots, \cdots Y$	$\gamma = \gamma = \frac{\lambda^{-\gamma_{+}} (\gamma_{+} \gamma)^{\gamma_{-}}}{\gamma_{-}} = \gamma \gamma_{+} \gamma_{+} \gamma_{-}$	٧
*, { = } * * × +, * * {	$^{\circ},^{\circ}\circ\xi=\frac{^{\uparrow}(^{\circ},^{\uparrow})^{^{\circ},^{\uparrow}}_{-,a}}{!\; T}=(T=\omega)$	٣

غرين (٣)

إذا كنانت نسبة الأشخاص الذين بموتون بسبب نوع معين من المرض هي

٠٠١، وكان عند الذين أمنوا على حياتهم ضد هذا النوع من المرض هو ٤٠٠، فيا هو احتيال أن لا تدفع شركة التأمين لأي منهم؟ وما هو احتيال أن تدفع لشخصين على الاكث؟؟

الحل

= ٩٩٢, • وذلك من جدول توزيع بواسون رقم (٢)

(٤ - ١ - ٤) ايجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة غير المستقلة توزيع الهايبر جيومترك

سبق وعرفنا أن توزيع ذي الحدين يستخدم في حالات المعاينة التي تكون نتيجتها أحد وجهين (مثلاً الوحدة المنتجة جيدة أو معيبة) عندما لا يتجاوز حجم العينة ٥٪ من حجم المجتمع، أما إذا تجاوز حجم العينة هذه النسبة فإننا نستخدم توزيع الهايبر جيومترك. ويشكل عام فإن هذا التوزيع يستخدم في التجارب التي تكون المعاينة فيها بدون إعادة، أي أن نتائج التجارب غير مستقلة وبالتالي فإن احتيال الحصول عل صفة معينة يتغير من تجربة إلى أخرى.

فإذا كان لدينا كيس به ٦ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء، وسحبنا بـدون إعادة ٣ كرات من هذا الكيس فإن احتهال الحصول عل ٣ كرات بيضاء يمكن حسابه عـلى النحو التالى:

فإذا كانت الكرة الأولى بيضاء، وحيث أن السحب بدون إعادة، فإنه يبقى في الكيس ٩ كرات منها ٥ بيضاء

$$\frac{o}{q}$$
 = بالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء = $\frac{\xi}{q}$ = .

$$\cdot$$
 احتمال الحصول على ٣ كرات بيضاء $\frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{1$

ويمكن ايجاد الصيغة الإحتمالية لتوزيع الهايبر جيومترك على النحو التالي:

$$(\omega_{i} = c_{i} \ \delta \ \omega_{y} = c_{y} \ \delta \ \ldots \ldots \delta \ \omega_{c} = c_{c})$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{i} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{y} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{z} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{z} \end{pmatrix}} = \frac{\langle \dot{c}_{i} \\ \dot{c}_{z} \end{pmatrix}$$

حيث ر، + ره + + رو = ر

ويمكن استنباط الصيغة الإحتبالية (٧- ١- ٤) من التطبيق المباشر لقانون الإحتبال الرياضي (١- ١- ٣)، حيث يمثل البسط عدد الحالات المواتية للحصول على ر كرة من اللون الأول، رب كرة من اللون الثاني، ، رد كرة من اللون ويينيا يمكن بها الحصول على ر كرة (بصرف النظر عن اللون) من جميع الكرات الموجودة في الكيس.

وإذا كان المطلوب هو إيجاد احتيال أن يكون عــنـد الكرات من اللون الأول هــو ر. بصرف النظر عن الألوان الأخرى فإنه يمكن كتابة هذا الاحتيال كيا يلي:

$$\frac{\begin{pmatrix} \dot{c}_{1} & \dot{c}_{1} & \dot{c}_{2} \\ \dot{c}_{1} & \dot{c}_{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_{1} & \dot{c}_{2} \\ \dot{c}_{2} & \dot{c}_{2} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \dot{c}_{1} & \dot{c}_{2} \\ \dot{c}_{2} & \dot{c}_{2} \end{pmatrix}} = (A - II - 3)$$

وتحقق الدالة (٨ ـ ١ ـ ٤) شرطى دالة كثافة الاحتمال، حيث أن:

$$I = \frac{\begin{pmatrix} i, 0 - 0 \\ i, 0 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i, 0 \\ i, 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} i, 0 \\ i, 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{J_{a}} = (i, 0) = (i, 0)$$

القيمة المتوقعة والتباين:

$$\frac{\left(\begin{array}{ccc} \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{2} \\ \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{2} \\ \dot{\upsilon}_{3} \\ \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{2} \\ \dot{\upsilon}_{3} \\ \dot{\upsilon}_{3} \\ \dot{\upsilon}_{4} \\ \dot{\upsilon}_{1} \\ \dot{\upsilon}_{2} \\ \dot{\upsilon}_{3} \\ \dot{\upsilon}_{4} \\ \dot{\upsilon}_{4} \\ \dot{\upsilon}_{5} \\ \dot{\upsilon}_{5}$$

ويسمى الكسر ف - رأ معامل التصحيح Correction Factor للمجتمعات المحدودة إذا كانت المعاينة بدون إعادة، أما إذا كان المجتمع غير محدود أو كانت المعاينة مع الإعادة فإن قيمة معامل التصحيح تساوي واحد صحيح، وفي هذه الحالة فإن توزيع الهيجيومترك في حالة المتغير ذو الوجهين يؤول إلى توزيع ذي الحدين.

مثال:

إذا تقدم ٦ من طلبة قسم الاقتصاد والإحصاء و ٤ من طلبة قسم المحاسبة و ٨ من طلبة قسم إدارة الأصال لملء ٤ وظائف شاغرة تمّ الإعلان عنها في إحسدى - ١٣٦ - الشركات، وإذا قررت الشركة أن خريجي الأقسام الثلاثة متكافشون من حيث القدرة على أداء العمل في الوظائف الشاغرة وقررت أن تختار بصورة عشوائية ٤ من المتقدمين لما ء هذه الرظائف، أوحد:

ر. ١ ـ احتمال أن يتم اختيار ٢ من قسم الإقتصاد والإحصاء و ١ من قسم المحاسبة و ١

من قسم إدارة الأعمال.

٢ _ احتمال أن يتم اختيار ٣ من قسم الاقتصاد والإحصاء

٣ .. القيمة المتوقعة لعدد الطلبة المختارين من قسم الإقتصاد والإحصاء

٤ _ تباين عدد الطلبة المختارين من قسم الإقتصاد والإحصاء.

الحل

$$I - \supset (m_{i} = 7) = 4) = m_{i} = 1$$

$$= \frac{\binom{7}{1} \binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{1}}{\binom{7}{1}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{1}}{\binom{7}{1}} = \binom{7}{1} = \binom{5}{1} = \binom{5}{1}$$

٣ ـ بالتعويض في (٩ ـ ١ ـ ٤) فإن

$$1, \Upsilon\Upsilon = \frac{\xi}{\Upsilon} = \frac{\Upsilon\xi}{\Lambda\Lambda} = \frac{1}{\Lambda\Lambda} \times \xi = (س,)$$

45.

٤ _ بالتعويض في (١٠ _١ _ ٤) فإن

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r}{\sqrt{1 + r}}}} \times \left(1 - \frac{r}{\sqrt{1 + r}}\right) \times \frac{\sqrt{1 - r}}{\sqrt{1 - r}} \times \frac{\sqrt{1 - r}}{\sqrt{1 - r}$$

الفصل الثانى

التوزيعات المتصلة Continuous Distributions

لقىد تعرضنا في الفصل السابق بالشرح لبعض التوزيعات المتقطعة الهـامـة وسنقوم في هذا الفصل بدراسة التوزيعات المتصلة التالية:

۱ - التوزيع المنتظم (أو المستطيل)
 ٢ - توزيع جاما

۳ ـ توزيم بيتا

٤ ـ التوزيع الأسى

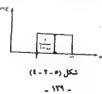
(١ - ٢ - ٤) التوزيع المنتظم (أو المستطيل)

Uniform or Rectangular Distribution

إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة إحتمال

= صفر فيها عدا ذلك (۱۰ - ۲ - ٤)

فإننا نقـول بأن المتغـير العشوائي س لـه توزيع منتظم (أنـظر شكل (٥ ـ ٢ - ٤)) ويتم الحصول على مثل هذا التوزيع عندما تكون جميع القيم بـين أ، ب متساوية الاحتمال.



$$g(m) = \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{m-1} cm = \frac{1}{m-1}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة كها في الشكل (٦ - ٢ - ٤)

وبشكل عام فإن دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم تأخذ الصورة

حيث ك مقدار ثابت يمكن حساب قيمته بما يحقق الشرطين الأساسيين لمدالة كثافة الاحتال

فإذا كانت دالة كثافة الاحتيال على النحو التالي

فإنه يمكن حساب قيمة ك التي تجعل من الدالة ح (س) دالة كشافة إحسال كها

ىلى: ح (س) شکل (۱ ـ ۲ ـ ٤)

- 18. -

عزوم التوزيع المنتظم:

باستخدام المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٣) فإن العزم الواوي حول الصفر هو

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 -$$

ومنها نجد أن

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} - \frac{\tau}{\tau} - \frac{\tau}{\tau} - \frac{\tau}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} + \frac{1}$$

وباستخدام المعادلة (٧ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma)}} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma}} - \frac{1+\gamma}{\gamma} - \frac{1+\gamma}{\gamma} = \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu}$$

مثال ۱:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mu$$

$$\mu_{1,n'}\mu$$

$$\frac{r^{\gamma_i}}{1+r^{\gamma_i}} = r^{\prime} \mu$$

اي ان
$$u_{k'}^{\dagger} = \frac{1}{\gamma}$$
 $u_{k'}^{\dagger} = \frac{1}{\gamma}$ وهكذا

$$\sigma^{\gamma} = \frac{\gamma^{\gamma}}{\gamma} = (\omega \omega_{\gamma})^{\gamma} = \frac{\gamma^{\gamma}}{\gamma}$$

وباستخدام المعادلتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣)، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\frac{\beta}{\beta} = \phi \dot{\beta}$$

صف ≤س ≤ ٤

فإن القيمة المتوقعة والتباين والتفرطح هي: من المادلة (١٣ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\Upsilon = \frac{\Upsilon}{2} - \frac{\chi}{2} \times \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{2}$$

$$\frac{17}{W} = \frac{V}{W} \times \frac{1}{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{$$

$$u'' = u''_{1} = \frac{1}{3 - oid} \times \frac{3^{\circ} - oid^{\circ}}{0} = \frac{107}{0}$$

وبالتعويض في المعادلات (٧ ـ ٢ ـ ٣)، (٨ ـ ٢ ـ ٣)، (٩ ـ ٢ ـ ٣) نجد أن
$$\frac{\xi}{-\mu} = \tau_{V} - \frac{17}{-\mu} = \tau_{W} = \tau_{G}$$

$$\mu_{\gamma} = \gamma + \gamma \times \frac{\gamma}{\gamma} \times \gamma + \gamma \times \gamma^{\gamma} = \gamma \gamma$$

$$\mu_{3} = \frac{\text{Fo?}}{\text{o}} + 3 \times \frac{\text{FI}}{\text{\gamma}} \times \text{Y} + \text{F} \times \frac{\text{FI}}{\text{\gamma}} \times \text{Y}^{\text{Y}} - \text{Y}^{\text{S}} = \frac{\text{FI}}{\text{o}}$$

و بالتعويض في المعادلتين (١٠ _ ٢ _ ٣)، (١١ _ ٢ _ ٣) فإن

$$\frac{\gamma\gamma}{\gamma(\frac{3}{\gamma})^{\gamma}} = \sqrt{\beta}$$

$$\frac{q}{q} = \frac{r}{q} \left(\frac{\xi}{r} \right)^{r} = \frac{q}{q}$$

٢٧ ـ ٢ ـ ٤) دالة جاما وتوزيع جاما

Gamma Function and Gamma Distribution

تعتبر دالة جاما واحدة من الدوال الرياضية الهامة والشائعة الاستخدام في نظرية الاحصاء وسنتطرق هنا إلى هذه المدالة والتوزيع الاحصائي المبني عليها والمسمى باسمها.

أُه لاً • دالة حاما

تعرف الدالة الرياضية

$$\Gamma$$
 (i) = $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-t^2}$

عل أنبا دالة جاما.

وهذا التكامل تقاربي عندما تكون ن موجبة، ويمكن أن يكتب على الصورة:

$$\Gamma$$
 (i) = $\int_{-\infty}^{\infty} -1$ (10)

وإذا استبدلنا س بـ س ۚ في المعادلة (١٤ - ٢ - ٤) فإنه يمكن كتابـة دالة جــاما

على الصورة:
$$\Gamma$$
 (ن) = $\int_{0}^{\infty} m^{7i-1} a^{-m'} c m$

والذي يهمنا من دالة جاما في هذا السياق هو بعض خصائصها الهامة والتي سنقوم باستخدامها والإشارة اليها في أكثر من موضع في هذا الكتاب

من المعادة ل (۱۶ ـ ۲ ـ ٤) نجد أن
$$\Gamma$$
 (ن) = $\int_{-\infty}^{\infty} w^{c-1} c(-a^{m-1}v)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} w^{c-1} c(-a^{m-1}v)$ $= -w^{d-1} a^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (i-1) w^{ij} a^{m} e^{-iv}$ $= (i-1) \Gamma (i-1)$

 Γ Γ Γ Γ Γ Γ Γ Γ Γ Γ

وإذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فإنه يمكن إثبات أن

$$1 \times Y \times T \times \dots (T - 0) (1 - 0) = (0) \Gamma$$

$$= (\ddot{c} - 1)! \tag{A1 - 7 - 3}$$

وإذا وضعنا ن = ١ فإن

وبالمثل عك اثبات أن

ومن الخصائص الهامة الأخرى التي يجب الإشارة اليها هي أن:

$$\frac{1}{\sqrt{1-1}} = \sqrt{\frac{1}{1-1}}$$

ثانياً: توزيع جاما

إذ كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة إحتمال

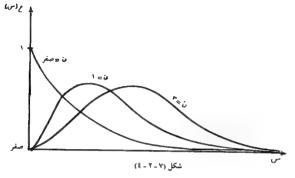
$$\omega > \alpha$$
 د (س، ن) = $\frac{\alpha^{-\nu} - \omega^{\nu-1}}{\Gamma}$

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع جاما ذي المعلمة ن.

ومن الواضح أن هذه الدالة تحقق شرطي دالة كثافة الاحتمال، حيث:

ويبينَ الشكل (٧ ـ ٢ ـ ٤) دالة كثافة الاحتمال لتوزيع جماما لعدد من قيم

معلمته ن



ولحساب العزوم لتوزيع جاما فإننا نستطيع استخدام الدالة المولدة للعزوم والمعرّفة بالمعادلة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالي:

$$\mu$$
 (τ) = τ (τ) μ

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

وبوضع ص = س (۱ - ت) حيث صفر

$$\frac{d}{dt} = \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dt}{dt} = \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dt}{dt} = \frac{dt}{dt}$$

وبالتالي فإن 4 (ت) = \frac{\tau}{\tau} (\cdot) \frac{\doldown}{\tau} \, \sigma \frac{\doldown}{\tau} \, \tau \cdot \frac{\doldown}{\tau} \, \tau \cdot \

- 180 -

(E = Y = Y1)

وبأخذ مفكوك الطرف الأيسر للمعادلة (٢١ ـ ٢ ـ ٤) نجد أن:

$$\frac{1}{1+c} \frac{1}{1+c} \frac{1$$

$$+\frac{\dot{c}(\dot{c}+1)(\dot{c}+1)\dots(\dot{c}+e^{-1})\dot{c}^{e}}{e!}+\dots$$

وباستخدام (۳۰ ـ ٤ ـ ٣)، (۲۲ ـ ۲ ـ ٤) فإن

$$\mu_{i} = \dot{c} (\dot{c} + 1) (\dot{c} + 2) \dots (\dot{c} + e - 1)$$

أي أن

$$\nabla' \mu - \nabla' \mu = \nabla \alpha$$
 تباین س (۵۵) تباین س

نظرية

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين س.له توزيـع جامـا بمعلمة ن.، ، س له توزيع جاما بمعلمه ن. فإن المتغير العشوائي

v + v = ن + مو الأخر له توزيع جاما بعلمه ن

البرحسان:

من المعادلة (٢ ~ ٢ ~ ٤) نجد أن

وحيث أن المتغيرين س. 6 س. مستقلان فإن:

(۲ - ۲ - ۲) دالة بيتا وتوزيع بيتا Beta Function and Beta Distribution

دالة بيتا دالة رياضية هامة وذات استخدامات واسعة في نظرية الإحصىاء لا بد من الإشارة اليها وإلى التوزيع الإحصائي المتصل بها بما يتناسب مع احتياجاتنا في هذا الكتاب.

أولاً: دالة بيتا

تعرف الدالة الرياضية

$$(\xi - Y - Y_0)$$
 $(y - Y_0)^{1-1}$ $(y - Y_0)^{1-1}$ $(y - Y_0)^{1-1}$

على أنها دالة بيتا ذات المعلمتين مكان

ويعتبر هذا التكامل تقاربياً إذا كانت قيمة كل من معلمتي الدالة مهن موجبة.

وإذا وضعنا س = جا θ في المعادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٤) نحصل على الصورة التالية

لدالة ستا:

$$(\xi - Y - Y) \qquad \theta \Rightarrow \theta ^{1-i\gamma} \text{ Lie. } \theta ^{1-r} = (i\zeta_r) \beta$$

ومن خصائص دالة بيتا الهامة أن

$$\frac{(\dot{\omega})\Gamma(\rho)\Gamma}{(\dot{\omega}+\rho)\Gamma} = (\dot{\omega}\rho)\beta$$

فإذا كانت م = ن = ١ فان

$$1 = \frac{(1)\Gamma(1)\Gamma}{(1+1)\Gamma} = \omega^{1-1}(\omega^{-1})^{1-1}\omega^{1} = (161)\beta$$

وإذا كانت م = ن = 1/ فإن

وبالتعويض في المعادلة (٢٦ ـ ٢٦ ع) فإن $\frac{\pi}{\sqrt{Y}}$ و $\frac{\pi}{\sqrt{Y}}$ د θ حتا $\frac{\pi}{\sqrt{Y}}$ د θ

$$\pi V = (V_{\tau}) \Gamma :$$

ومن خصائص دالة بينا الهامة الأخرى أنها متهائلة في معلمتيها، فإذا وضعنا ص = 1 - س في المعادلة (20 ـ 2 ـ ٤) نجد أن

$$eta$$
 (م ، ن) $\int_{-1}^{1} w^{2} \cdot (1 - w)^{2} \cdot 1$ دس eta

ثانياً: توزيع بيتا

الصورة الأولى: إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

$$1 \geq \infty$$
 $= \frac{m^{2} \cdot (-m)^{0}}{\beta}$ $= \infty$ $= 1$

فيها عدا ذلك (٢٨ ـ ٢ ـ ٤)

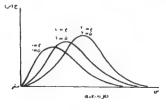
فإننا نقـول بأن المتغـير العشوائي س لـه دالة تـوزيع بيتـا من النوع الأول ذي المعلمتين عكن

وتحقق هذه الدالة شرطي دالة كثافة الإحتمال حيث أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty$$

وذلك باستخدام المعادلة (٢٤ - ٢ - ٤)

ويبينَ الشكل (٨ ـ ٣ ـ ٤) دالـة كثافـة الإحتــال لتــوزيــع بيتــا لعــدد من قيـم معلمتيه مـــهن



شکل (۱۵-۲-3) - ۱٤۸ -

ولحساب العزوم لتـوزيع بيتـا من النوع الأول نستخـدم الدالـة المولـدة للعزوم والمعرّفة بالمعادلة (٣٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالى:

$$(2 - 7 - 79)$$
 $\frac{1}{(36)8} = \frac{1}{(36)8}$

$$(7-7-7)$$
 $(7-7-7)$ $(7-7-7)$

$$(\dot{\omega}\zeta + \rho) \beta + \frac{\omega}{!} (\dot{\omega}\zeta + \rho) \beta + (\dot{\omega}\zeta \rho)\beta \Big] \frac{1}{(\dot{\omega}\zeta \rho)\beta} = (\dot{\omega}) \mu$$

وباستخدام (٣٠ ـ ٤ -٣) 6 (٣١ ـ ٢ ـ ٤) فإن العزم الواوي حول الصفر هو:

$$\frac{(36)^{\beta}}{(36)^{\beta}} = \frac{\beta'}{\beta}$$

و باستخدام المعادلة (٣٧ ـ ٣ ـ ٤) فإن

$$\frac{\rho}{\dot{\upsilon} + \rho} = \frac{(\dot{\upsilon} + \rho)\beta}{(\dot{\upsilon} + \rho)\beta} = (\omega) = \dot{\mu}$$

$$\frac{(1+\rho)\rho}{(1+j+\rho)(j+\rho)} = \frac{(j+\rho)\beta}{(j+\rho)\beta} = (7-\rho)^{-1} = \gamma'\mu$$

$$\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu} = \sqrt{\sigma}$$
 تباین س (۲م) تباین س

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) =$$

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع بيتا من النوع الثاني ذي المعلمت من .

ومن الواضح أن هـذه الدالـة هي الأخرى تحقق شرطي دالـة كثافـة الإحتمال. عيث أن

ح (س) ≥ صفر

كها أنه يمكن إثبات أن ﴿ ﴿ ﴿ ﴿ ﴿ ﴿ ﴿ ﴿ وَ لَا لَا لَكُوا التَّالِي ۗ

$$(\xi - Y - Y\xi) \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(i+1)^{3+i}} c \quad \text{or} \quad (3Y - Y - \xi)$$

فإن

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}} \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^{1}, \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}} = \alpha_0 \left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}} e^{\alpha_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_0)}}$$

وذلك باستخدام المعادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٤).

(٤ - ٢ - ٤) التوزيع الأمىي

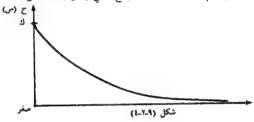
Exponential Distribution or Laplace Distribution

. إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

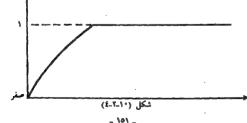
- فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع أسي.

وتحقق هذه الدالة شرطى دالة كثافة الإحتيال، حيث أن:

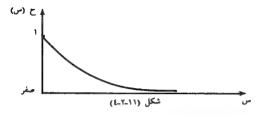
ويمكن رسم دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الأسي كها هو مبين بالمشكل (٩ ـ ٢ ـ ٤)



ودالة الاحتمال التجميعي لهذا التوزيع ح (س) هي



واذا كانت ك = ١ فإن ح (س) - هـ س وتاخذ الدالة في هذه الحالة الشكل (١١ ـ ٢ ـ ٤)



وتكون دالة الإحتمال التجميعي ع (س) = ١ - هـ سـ

ولحساب العزوم للتوزيع الأسي نستخدم الدالة المولدة للعزوم المعرفة بـالمعادلـة (٣٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالى:

$$= \left(1 - \frac{c}{16}\right)^{-1}$$

وبإيجاد المفكوك للطرف الأيسر للمعادلة (٣٨ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\mu(z) = t + \frac{z}{t_1} + \frac{z}{t_2} + \dots + \frac{z}{t_{2t}} + \dots$$

وباستخدام (٣٠ ـ ٤ ـ ٣)، (٣٩ ـ ٢ ـ ٤) فإن العزم الواوي حول الصفرهو:

$$\frac{!g}{!g} = '\mu$$

وباستخدام (٤٠ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\ddot{\gamma}'\mu - \dot{\gamma}'\mu = \dot{\gamma}\mu = (\omega)$$

$$\ddot{\gamma}'\mu - \dot{\gamma}'\mu = (\omega)$$

ولهذا التوزيع تطبقات واسعة في عدد من الظواهر التي تتبع هذا التوزيع مثل أعيار أنواع معينة من قطع الغيار، الفترة الزمنية بين المكالمات الهاتفية الواردة إلى أحمد المقاسم اليدوية أو الآلية ومدة انتظار (أو خدمة) الزبائن في إحدى العيادات أو أساكن الحدمة مثل الكراجات وغيرها.

مشال:

إذا كانت مدة خدمة إحدى قطع الغيار في آلة معينة تتبع التوزيع الأسي بمتوسط قدره ثلاث سنوات وأردنا إيجاد:

١ _ احتيال أن تخدم هذه القطعة مدة سنتين على الأقل.

٢ - احتال أن تخدم هذه القطعة لمدة خس سنوات على الأقبل إذا علم بأنها قد
 خدمت مدة ثلاث سنوات على الأقل.

يكن حل مثل هذا النوع من الأمثلة على النحو التالي:

بما أن متوسط التوزيع = ٣ فإن قيمة الثابت ك = ١/

١ _ احتمال أن تخدم قطعة الغيار سنتين على الأقل هو

. . 0178 =

٢ _ احتمال أن تخدم قطعة الغيار خمس سنوات على الأقل إذا علم بأنها خدمت ثلاث سنوات بمكن حسابه باستخدام (١٣ _ ١ _ ٢) كيا يلى:

$$\frac{c}{c} (m \ge 0) = \frac{c}{c} (m \ge 0)$$

$$\frac{c}{c} (m \ge 0) = \frac{c}{c} (m \ge 0)$$

$$= \frac{c}{c} (m \ge 0)$$

= ۱۳۶، مرة أخرى

وهذه خياصية من خصائص التنوزيع الأسي وهي منا يسمى بخاصية الإفتقار إلى المذاكرة Lack of memory في هذا التوزيع، حيث أن العمر المستقبلي لقطعة الغيار (مثلاً) مستقل عن عمرها الحالى.

اسئلة وتمارين (٤)

- (١ ٤) إذا كان ٤٠٪ من المستخدمين في شركة ما يوافقون على نظام جديـد للحوافز، واخترنا عشوائياً خسة مستخدمين، أوجد:
- ١ ـ احتمال أن نجد من بينهم شخصين فقط يوافقون عمل النظام
 الجديد
- ٢ ـ احتـــال أن نجد من بينهم شخصــاً واحداً عــلى الأقل يــوافق عـــل
 النظام الجديد.
- ٣- القيمة المتوقعة لعدد الـذين يوافقـون على النـظام الجديـد في عينة
 مكونة من ١٠٥ شخص.
- إلانحراف المعياري لعمدد الذين يوافقون عملى النظام الجمديد في
 عينة مكونة من ٥٤ شخص.
- (٢ ٤) إذا كان احتمال أن الموحدة تالفة من إنشاج آلة معينة همو ٠٠.٠١ وأخذنا عينة مكونة من ٤ وحدات من إنتاج هذه الآلة. احسب
 - ١ _ احتمال أن لا تحتوي هذه العينة على وحدة تالفة
 - ٧ _ احتيال أن تحتوي على وحدة تالفة واحدة على الأقل
 - ٣_ احتيال أن تكون الوحدة الثانية تالغة.
- (٣- ٤) بالإشارة إلى تمرين (٤ ـ ٢)، إذا اخترنا عينة عشوائية مكونة من خمس أسر من مجتمع هذه الدراسة، أوجد
- ١ ـ احتيال أن يكون من بينها ثلاث أسر فقط تملك ثلاجة أقل من ٩
 قدم.
- ٢ احتسال أن يكون من بينها أسرة واحدة على الأقبل من مالكي
 الثلاحة ١١ قدم فأكثر.
- وإذا اخترنا عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ اسرة من مجتمع هذه

الدراسة، **أوجد** القيمة المتوقعة والتبـاين لعدد الأسر التي تملك ثـلاجة ٩ ـ ١١ قدم.

(٤ ـ ٤) إذا كان احتمال وقوع حادث معينَ هو لهـ أوجد

١ - إحتمال وقوع الحادث مرة واحدة في أربع محاولات مستقلة

٣ - إحتيال وقوع الحادث مرة واحدة على الأكثر في خس محاولات مستقلة

٣ - القيمة المتوقعة لعدد مرات وقوع الحادث في ٦٠ محاولة مستقلة.

٤ - الانحراف المعياري لعدد مرات وقوع الحادث في ٧٧ محاولة مستقلة.

(٥ ـ ٤) إذا كانت دالة المنفعة هي ع = ٣ س - ١٠,٠ س^{*}

ح = - ، أوجد القيمة المتوقعة للمنفعة.

(٢ - ٤) إذا كانت مراقبة جودة الإنتاج في مصنع معين تتم بفحص عينات عشوائية حجم كل منها خمس مفردات، وإذا كان احتمال أن تكون الوحدة معينة يساوي ٢٠٠٠، أوجد التوزيع التكواري المتوقع لعدد الوحدات المعينة في ١٠٠٠ عينة عشوائية.

(٧- ٤) إذا كان متوسط عدد المكالمات التلفونية التي ترد على لوحة تلفونـات في مؤسسة معينة خلال يوم عمل طوله ثبان ساعات هــو ٢٤ مكالمــة، فها هو احتهال ورود ٤ مكالمات خلال ساعة واحدة؟ ومــا هو احتهال ورود مكالمة واحدة على الأقل خلال ساعة واحدة؟

 (٨-٤) إذا كان متوسط عدد المكالمات التي ترد على لوحة تلفونات في شركة معينة، خلال الفترة ٢-٤ بعد الظهر هـو ٢٠٥ مكالمة في الدقيقة.

أوجد:

١ ـ احتمال عدم ورود أية مكالمة خلال دقيقة معينة.

٢ _ احتمال ورود مكالمة واحدة على الأقل في الدقيقة الواحدة.

(٩-٤) قام مدير التخطيط في أحد المصانع بدراسة ظاهرة توقف الالات

اليومي في المصنع بسبب الأعطال، وقىد جميع البيمانيات التبالية عن الآلات التي توقفت خلال ٢٠٠ يوماً:

عدد الأيام	عدد الألات التي
	توقفت في اليوم
99	صفر
٧٠	١
71	۲
٦	٣
1	ź
_صفر	٥
7	المجموع

فيا هو احتيال أن تتوقف ثلاث آلات عن العمل في اليـوم الواحــــ؟ ما هو احتيال أن تتوقف آلتان على الأكثر عن العمل في اليـوم الواحــــ؟

(١٠ ـ ٤) إذا كان متوسط عدد إصابات العمل في مصنع معين هو ٤٠٠ إصابة في اليوم الواحد، فيا هو احتيال حدوث إصابتين في اليوم الواحد؟ وما هو احتيال حدوث إصابة واحدة على الأقل في اليوم الواحد؟

(١١ ـ ٤) أولًا: إذا كان المتغير س يتبع توزيع بواسون بدالة احتمال

ثانياً: إذا كانت السفن تصل إلى ميناء معين بمعدل سفينة واحدة كل

 ليوم، فها همو احتيال وصول سفينة واحدة على الأقمل في اليموم الواحد؟

(١٢ - ٤) تصل الطائرات لأحد المطارات بمعدل ٣ طائرات في الساعة خملال الفترة الواقعة بين الساعة الواحدة والساعة الثانية بعد الظهر. فإذا كان وصول الطائرات يتبع التوزيع البواسوني، أوجد

١ حتىال عدم وصول أية طائرة خلال هذه الفترة من اليوم
 ٢ حتىال وصول طائرتين خلال هذه الفترة من اليوم.

إذا كان احتيال أن يصاب شخص برد فعل سيء نتيجة حقنه بمصل
 معين هو ٢٠٠٠، وأخذنا عينة حجمها ٢٠٠٠ من الأشخاص الذين
 حقنوا بهذا المصل، أوجد

١ _ احتمال أن يصاب شخصان برد الفعل السيء

٢ ـ احتمال أن يصاب أكثر من شخصين برد الفعل السيء.

(١٤ ـ ٤) حدّد الاحتمال المطلوب في كل من الحمالات المذكبورة أدناه مستخدماً كسوراً عادية أو عشرية (طبقاً لما تجده مناسباً):

أولًا إذا كان احتهال وقوع حادث معين يساوي لل-، أوجد

١ _ احتمال عدم وقوع الحادث في ٤ محاولات مستقلة

٢ ـ احتيال وقوع الحادث مرة واحمدة على الأقبل في ٤ محاولات مستقلة.

 ٣- القيمة المتوقعة لعدد صرات وقوع الحادث في ٨٠ محاولة مستقلة.

٤ ـ التباين لعدد مرات وقوع الحادث في ٤٨ محاولة مستقلة.

ثَانياً إذا كان احتيال وقوع حادث معين يساوي ٢٠٠٠، ٠، أوجد

١ ـ احتمال وقوع الحادث مرتين في مائتي ألف محاولة مستقلة

إلى احتيال وقوع الحادث مرتين على الأقبل في مائتي ألف محاولة
 مستقلة .

(١٥ ـ ٤) إذا كانت عيادة الطوارى، في مستشفى معين تستقبل في المتوسط حالتين في الساعة في الفترة من العاشرة صباحاً حتى الثانية بعد الظهر، ما هـو احتمال أن تستقبل العيادة ١٠ حالات في هـذه الفترة؟ ومـا هو احتمال أن تستقبل ٤ حالات في الساعة خلال هذه الفترة؟

وإذا كانت العيادة مجهمزة لاستقبال ١٢ حـالة، مـا هو احتــهال حدوث ازدحام في هذه العيادة؟

 الجملول التالي ببين توزيع الحوادث الأسبوعية التي وقعت لـ ٥٠٠ عاملًا في صناعة البناء:

عدد العيال	عدد الحوادث
£0 *	صغر
141	١.
73	۲
*1	٣
٥	٤
70.	اللجموع

١ ـ حساب قيمة كل من الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع

٢ ـ توفيق نموذج توزيع بواسون لهذا التوزيع

٣ ـ التعليق على جودة مطابقة التوزيع الموفق للتوزيع المشاهد

(١٧ _ ٤) إذا كان لدينا ثلاث مجموعات كما يلي:

والمطلوب

المجموعة الأولى مكونة من ٣ رجال. ٣ نساء. ٤ أطفال المجموعة الثانية مكونة من ٤ رجال. ٤ نساء، طفلين المجموعة الثالثة مكونة من ٥ رجال. ٣ نساء، طفلين

١ خترنا واحداً من كل مجموعة بطريقة عشوائية. ما هو احتيال أن
 يكون لدينا ٣ أطفال؟ وما هو احتيال أن يكون لـدينا رجلين عـلى
 الأقل؟

٢ خلطنا المجموعات الثلاث معاً واخترنا، بدون إصادة، عينة عشوائية مكونة من ٦ أفراد، ما هو احتيال أن تحتوي هذه العينة على رجلين وامرأتين وطفلين؟ وما هو احتيال أن يكون لدينا أربعة رجال؟ أحسب القيمة المتوقعة والتباين لعدد الرجال في هذه العينة.

 (١٨ - ٤) مصنع به ثـلاث آلات لإنتاج سلعة معينة، أخـذنا ١٠ وحـدات من إنتاج الآلة الأولى، ١٠ وحدات من إنتاج الآلة الثانية، ٨ وحدات من انتاج الآلة الثالثة وخلطناها معاً.

فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٦ وحدات، أوجد:

١ _ احتمال أن تحتوي هذه العينة على وحدتين من انتاج الألـــة الأولى.

وحدتين من إنتاج الآلة الثانية. وحدتين من إنتاج الآلة الثالثه.

القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المختارة من إنشاج الالة
 الأه إ...

(١٩ - ٤) إذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال

 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

= صفر فيها عدا ذلك

١ _ ما اسم هذا التوزيع؟

٢ _ أوجد: ت (س) ، تبا (س)

٣ - أوجد: ت (١٠ س + ٥)

٤ _ أوجد: تبا (أس + ب)

(٢٠ - ٤) يوجد في محمل تجاري معين ١٥ إطاراً تبدو وكأنها متشابهة، مع أنها
 تحتوى على خمسة إطارات فيها خلا سبيط.

فإذا اشترى أحد الزبائن أربعة إطارات، ما همو احتهال أن يكمون من بينها إطاران فيهما خلل بسيط؟

(٣١ - ٤) إذا كان التغيّر في عمق نهر (بـالأقدام) من يـوم لآخر في منـطقة معينـة يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتيال

ح (س) = ك - ۲ < س < ۲

= صفر فيها عدا ذلك

١ ـ أوجد قيمة ك وارسم دالة كثافة الاحتمال

٢ ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعي وارسم هذه الدالة

٣ ـ أوجد القيمة المتوقعة لعمق النهر في المنطقة المذكورة
 ٤ ـ أوجد تباين العمق في المنطقة المذكورة

 إذا كان وقت وصول الشاحنات إلى محطة تفويغ، خلال فترة زمنية طولها ٣٠ دقيقة، يتبع التوزيع المنتظم في المدى من صفر إلى ٣٠
 دقيقة، أوجد احتمال وصول شاحنة إلى همذه المحطة خملال الدقمائق الخمس الأخرة من هذه الفترة.

أوجد قيمة الثابت ك، ثم أوجد القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع

(٤٠-٤) إذا كان طول الحياة (بالساعة)، لجزء الكتروني من أجزاء التلفزيون.
 متغيراً عشوائيا يتبع التوزيع الاسى بدالة كثافة الاحتيال

أوجد احتيال أن يعمر هذا الجزء ٣٠٠ ساعة فأكثر.

سيارة تسير بأربعة عجلات، فإذا كان احتيال تعطّل العجلة الواحدة يساوي ٢٠.٥، فها هو احتيال تعطّل السيارة؟ وإذا قرر سائق السيارة أن يجمل معه عجلة احتياطية واحدة، فها هو احتيال تعطّل السيارة بعد إضافة العجلة الاحتياطية؟ وإذا كانت التكلفة المترتبة على تعطّل السيارة تساوي ١٥٠ ديناراً وتكلفة إضافة العجلة تساوي عشرة دنانير، فهل تنصح السائق بإضافة عجلة احتياطية ثانية؟

إذا كانت نسبة المعيب في الإنتاج اليومي لمصنع معين منفيراً عشوائياً
 من له دالة كثافة احتمال

وإذا علم أنه لا يمكن بيع الإنتاج اليومي الذي تكون فيه نسبة المعيب أكثر من ٢٥.٠، أوجد احتهال عدم بيع الكمية المنتجة في يوم معين.

(٢٧ _ ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال

١ _ ارسم دالة كثافة الاحتمال

٢ _ أوجد دالة الاحتمال التجميعي وارسم هذه الدالة

٣_ أوجد القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع

(س) تتبع إذا كانت نسبة المبيعات الأسبوعية من مخزون سلعة معينة (س) تتبع
 توزيم بيتا بدالة كثافة احتيال

١ ـ أوجد احتمال أن تكون نسبة المبيعات أكثر من ٦٠ . • من المخزون

٢ ـ أوجد احتمال أن تكون نسبة المبيعات أقل من ٠,٤٠ من المخزون

(٢٩ ـ ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتهال

١ - أوجد قيمة الثابت أ

٢ - أحسب توقع وتباين هذا التوزيم

٣ - أحسب معاملي الالتواء والتفرطح لهذا التوزيع

-ح (۱ ≤ س ≤ ۷)

إذا كانت مدة الكشف (س) التي يقضيها المريض في عيادة أحمد الأطباء متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الأسي بمتوسط ١٥ دقيقة وله دالة كثالة احتيال

۱ – أوجد فيمة θ

٢ - احسب تباين هذا التوزيع

٣ - ما هو احتمال أن يفضي المريض في غمرفة الكشف مـدة تزيـد عن
 ٢٠ دقيقة

٤ - ما هو احتمال أن يقضي المريض في غرفة الكشف مدة تقل عن
 ١٥ دقائة

 ه احتمال أن يقضي المريض في غرفة الكشف عشرة دقائق أخرى إذا علم بأنه قد مضى عليه عشرة دقائق في غرفة الكشف.

(٣١ - ٤) إذا كانت الفترة النرمنية (س) بين هبوط طائرتين متتاليتين في أحد المطارات متغيرا عشوائيا له دالة كثافة احتيال

 $\infty >$ ه= eta ه= eta ه= eta

= صفر فيا عدا ذلك

وبعد مراجعة السجلات وجد بأن عدد الطائرات التي هبطت في هـذا المطار في ١٢٠٠ ساعة هو ٨٠٠ طائرة، والمطلوب:

 θ ـ تقدير قيمة

حساب احتمال أن تنزيد الفترة بين هبوطين متساليين عن ثـلاث ساعات.

{ح (س ≥ ۳) }.

٣_ حساب احتمال أن نقـل الفترة بـين هبوطـين متتاليـين عن ساعـة
 واحدة { ح(س ≤ ۱) }.

٤ ـ حساب احتهال أن تتراوح الفترة بين هبوطين متناليين بين ساعة
 واحدة وخمس ساعات (ح (۱ ≤ س ≤ ٥)).

(٤-٣٢) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = أ جـ ≤ س ≤ د

= صفر فيها عدا ذلك

وكان ت (س) = ٧

تبا (س) = ٤

أوجد قيمة كل من جـ 6 د

- إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع بواسون بمعلمة θ ، أوجد العـزم الواوي حول الصفر باستخدام الدالة المولمة للعزوم.
- (٣٤ ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع جاما بمعلمة ن، أوجد:
 ت (س) ك تبا (س) ك العزم الواوي حول الصفر لهذا التوزيع
- (3-2) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع بيتا بمعلمتين م ٤ ن أوجمد:
 ت (س) ٤ تبا (س)، العزم الواوي حول الصفر لهذا التوزيع.
- إذا كان انتاج إحدى السلع يتم على ثـلاث مراحـل وطول كـل مرحلة من هـذه المراحـل يتبع التـوزيـع الاسي بمتـوسط ٢٠ دقيقـة للمرحلة الأولى. ٣٠ دقيقة للمرحلة الثانية، ١٠ دقائق للمرحلة الثالثة
- ١ ـ ما هي الفترة الزمنية المتوقعة لانتاج الوحدة الواحدة من هذه السلعة ؟
 ٢ ـ ما هو احتيال أن تزيد مدة المرحلة الأولى عن ٣٥ دقيقة ؟
 - ٣ ـ ما هو احتيال أن تقل مدة المرحلة الثالثة عن ٥ دقائق ؟
 - ٤ ـ ما هو احتيال أن تتراوح مدة المرحلة الأولى بين ١٥ و ٢٥ دقيقة ؟
 ٥ ـ ما هو احتيال انتاج الوحدة الواحدة في أقبل من ساعة إذا علم
 بأنها قد امضت ٢٨ دقيقة في المرحلة الأولى و ٢٣ دڤيقة في المرحلة الثانية ؟
 - إذا كانت مدة المكالمة الخارجية التي تبرد إلى أحد المقاسم الدولية تتبع
 التوزيم الاسى بدالة كثافة احتهال

ح (س) = θ هـ ا ۵س س > صفر

ومن مراجعة سجـلات المقسم وجد بـأن ١٠٠ مكالمـة استغـرقت ٦٠ ساعة:

- ۱ أوجد قيمة θ
- ٢ ـ ما هو احتمال أن يقل وقت المكالمة عن دقيقتين ع
- ٣ ـ ما هو احتمال أن تزيد مدة المكالمة عن خس دقائق م
- إذا كنان متوسط تكلفة الدقيقة الواحدة ١.١٠ دينار، منا هنو
 احتمال أن تزيد تكلفة المكالة عن عشرة دنانير؟

الباب الخامس

توزيعات العينات الصغيرة والكبيرة

The Large and Small Samples Distributions

لدراسة أية ظاهرة من الظواهر أو أية مشكلة من المشاكل فإنه لا بد للباحث من ان يقوم أولاً وقبل كل شيء بجمع المعلومات والبيانات الإحصائية اللازمة لمثل هذه المدراسة. هذا ويمكن أن يتم جمع البيانات عن مثل هذه المظاهرة أو المظواهر أما بالحصر الشامل لكافة عناصر المجتمع على الدراسة أو بأخذ عينة عشوائية من عناصر هذا المجتمع، ومن ثم يقوم الباحث بتعميم النتائح التي يتم الحصول عليها من العينة على المجتمع ككل.

فإذا فرضنا أن ح (m, θ) هي دالة كثبافة الاحتيال لمجتمع الدراسة بمعلمة واحدة θ وكانت θ معلومة فإنه يمكن تحديد دالة كثبافة الاحتيال ح (m, θ) بالكامل ولا تكون هنالك أية ضرورة لعملية المعاينة من أجل الحصول على تقدير فمذه المعلمة. هذا وستتم مناقشة موضوع التقدير الاحصائي بالتفصيل في الباب السيادس من هذا الكتاب.

فمثلاً إذا كانت ح (س، θ) هي دالة كنافة الاحتيال للمتغير العشوائي س فإن $\mu = \tau(m)$ هي متوسط المجتمع، وإذا كان المجتمع غير محدود فإن μ هي متوسط عدد غير محدود من قيم المتغير العشوائي س. وتقوم فكرة المعاينة على إختيار عينة عشوائية محدودة من قيم المتغير س واستخدام بيانات هذه العينة لتقدير معالم المجتمع على الدراسة، والقضية الأساسية التي تطرحها نظرية المعاينة هي: هل يمكن استخدام عدد مدود من قيم المتغير العشوائي س (عينة محدودة حجمها ن مثلاً) للحصول على تقادير موثوقة لمعالم المجتمع، كأن نستخدم مثلاً الوسط الحسابي سلفردات هذه

العينة المحدودة من قيم المتغير العشوائي س كتقدير لمتوسط المجتمع؟

إن الجواب على مثل هذا السؤال هو بالإيجاب ولولا ذلك لما كان بالإمكان الاعتماد على العينات العشوائية المحلودة للحصول على تقديرات لمعالم أي مجتمع إحصائي مثل على ٢٥ وفي هذا الباب نتحدث عن أمور لها صلة مباشرة بالمعانية الإحصائية وتوزيعات العينات الكبيرة والصغيرة مثل قانون الأعداد الكبيرة، نظرية النوعة الموكزية، التوزيع الطبيعي، توزيع (ت)، توزيع كاي تربيع، وتوزيع (ف).

الفصل الأول

قانون الأعداد الكبيرة ونظرية النزعة المركزية.

سبوف نقوم في هـذا الفصل بعـرض نظريتـين من أهـم النظريـات التي لها صلة كــرة منظرية المعاينة Sampling Theory:

١ _ قانون الأعداد الكبيرة

٢ ـ نظرية النزعة المركزية

(١ - ١ - ٥) قانون الأعداد الكبيرة

بالنظر إلى أهمية هذا القانون فسوف نستعرض من خلاله أربع نظريات هامة لها صلة مباشرة بقانون الاعداد الكبيرة:

ـ نظرية بينيه Byne' Theorem

۔ متباینة تشیبتشیف – متباینة تشیبتشیف

_ قانون الأعداد الكبيرة The Law of Large Numbers

_ نظرية ديموافر De Moivre's Theorem

١ ـ نظرية بينيه

تنص نظرية بينيه على ما يلي: إذا كان لدينا متفير عشوائي غير سالب س (أي أن صفر ≤ س ≪ ∞) وكان ت (س) ≃ µ

فإن (0-1-1) خورس ≥ 0 (س ≥ 0)

حيث ك ثابت إختياري غبر سالب

الرهان:

إذا فرضنا أن ح (س) هي دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائي المتصــل س في المدى صفر ≤ س ≤ ∞, فإن

= ,
$$\int_{-\infty}^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-$$

، من المعلوم أن

$$(0-1-7)$$
 . (m) (m) (m) (m) (m) (m) (m)

$$\mu^{\mu}$$
 (0-1-0) μ^{μ} (0-1-0)

$$(0-1-7)$$
 $(\mu \ 2) > (\mu \ 2) > (m)$

وحيث أن ت (س) = µ فإننا نجد من (٦ _ ١ _ ٥) أن:

$$(0-1-V)$$
 $\frac{1}{2} \ge (\mu \stackrel{!}{=} 1)$

مثال ۱:

إذا علم أن متوسط عمر المصباح الكهربائي الذي تنتجه إحدى الشركات هو ۱۲۰۰ علم أن من نظرية بينيه Byne Theorem نستطيع القول بـأن إحتيال أن يزيد عمر أي مصباح من إنتاج هذه الشركة عن ١٢٠٠ ساعة هو

$$-\frac{1}{1} > (1۲۰۰ \leq \frac{1}{1})$$
 ح (س $\geq 17۰۰ > (1۲۰۰ \leq 1)$ ح

حيث س = عمر المصابح الكهربائي ك = ١

وكذلك إحتىمال أن يزيـد عمر المصبـاح الكهربـائي من إنتاج هـذه الشركة عن ١٨٠٠ ساعة هو

ح (س ≥ ۱۸۰۰) < ۱۲۲، ۰

جيث ك = ١,٥ في هذه الحالة.

واحتمال أن يزيد عمر المصباح الكهربائي من إنتاج هذه الشركة عن ٢٤٠٠ ساعة هو

$$\frac{1}{\gamma} > (\gamma \xi \cdot \cdot \cdot) < \frac{1}{\gamma}$$
 $< (m \ge \gamma \xi \cdot \cdot) < 0, \cdot$

حيث ك = ٢ في هذه الحالة.

٢ - متباينة تشييتشيف

من الواضح أنه كلها كان الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي س صغيراً كلها كانت قيمة هذا المتغير لا تختلف اختلافاً كبيراً عن القيمة المتنوقعة لهذا المتغير العشوائي وعليه فإنه يمكن الحكم بصورة تقريبية على مدى الاختلاف بين قيم المتغير العشوائي س والقيمة المتوقعة له، علماً بأن هذا لا يعطي تقديراً كمياً لاحتهالات إنحراف قيم س عن توقعها وقد اقترح العالم الروسي تشبيتشيف (لأول مرة) في منتصف القرن الناسم عشر حلاً لهذه المسألة:

تنص نظرية تشيبتشيف على أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي غير سالب مثل س مفر < س < > 0 وكان ت (س) μ وتبا (ص < > 0 فإن

$$(-1-\Lambda) \qquad \frac{1}{r^2} > (\sigma \stackrel{!}{=}) - (-1-\Lambda)$$

حيث ك ثابت إختياري موجب

ويمكن إثبات هذه النظرية كما يلي:

إذا كمانت ح (ص) دالة كثمافة الاحتمال للمتغير العشوائي غير السالب ص (صفر ≤ ص ≤ ∞) فإن العزم الواوي حول الصفر لهذا المتغير هو:

حيث

أ ثابت إختياري غير سالب.

من المعلوم أن

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{1} c_{0} c_{1} c_{2} c_{3} c_{4} c_{4} c_{5} c_{$$

وبالتعويض من (١٠ ـ ١ ـ ٥) في (٩ ـ ١ ـ ٥) فإن

$$(0-1-1)$$
 $(0-1-1)$

لنفرض أن:

ص = اس - ت (س) | وهذا مقدار موجب يتراوح بين صفر و٥٥

ت (س) = μ

- L 1 = 1

حيث الد ثابت إختيري غير سالب

س ۽ نابت ٻحد يي خبر

فإن المعادلة (١١ ـ ١ ـ ٥) تؤول إلى

(0 - 1 - 17)

وحیث أن ص = | س - ت (س) | کها سبق أن فرضنا فإن (۱۲ ـ ۱ ـ ٥) بمکن کتابتها کها یلی

وبقسمة طرفي المعادلة (١٣ ـ ١ ـ ٥) على M_0 ك فإن هذه المعادلة تؤول إلى

$$|-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| = |-1| =$$

وإذا وضعنا و = ٢ للحصول على التباين

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\psi}$$
 $=$ ψ $=$ ψ $=$ ψ $=$ ψ $=$ ψ $=$ ψ $=$ ψ

أي أن ح (| س - ت (س) | > ك مر) ≤ المراح - الم

أي أن ح ر أس - µ أ > ك صر) ≤ 1 - 0 (1 - 1 - 0)

> وهذه الحالة الخاصة هي ما يسمى بنظرية (أو متباينة) تشبيتشيف. كما يمكن إثبات نظرية تشبيتشيف بطريقة أحرى على النحو التالى:

من المعلُّوم أن العلاقة بين $| \, \omega - \mu \, | \, , \, \, \, \, \, \, \,$ هي علاقَة تقابليــة وحيدة وبالتالى فإن:

$$(3-1-17)$$
 $({}^{7}\sigma^{7}\underline{)} < {}^{7}(\mu-m) = \sigma (0 | \mu-m|)$

فإذا فرضنا أن (س - μ) = ص فإن المتغير العشوائي ص هو متغير غير سالب (صفر $\alpha = \infty$) و $\alpha = \infty$ وباستخدام نظرية بينية نجد أن

أي أن

$$\frac{1}{2} > (\nabla \sigma) + \nabla \sigma)$$

وحيث أن ك هو ثابت إختياري فإننا نستطيع أن نضع ك⁷ بـدلاً من ك وتصبح المعادلة (۱۵ ـ ۱ ـ ٥) على النحو التالي:

$$(0-1-19)$$
 $\frac{1}{(2^{7}-1-0)} > (70^{7}-1-0)$

وباستخدام العلاقة التقابلية الوحيدة بين | س | و| و| نجد أن

$$(\circ - ?) \qquad \frac{1}{r_{\underline{1}}} > (\circ \underline{1} < |\mu - \mu|) > 0$$

مثال ۲:

بالاشارة إلى المثال (١)، إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها ن = ١٠٠ مصباح من إنتاج المصنع وحسبنا متوسط عمر المصباح الكهـربائي (س) من هـذه العينة، وحيث

واذا فرضنا أن

$$1 \cdot \cdot = \frac{1 \cdot \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot} = \frac{\sqrt[3]{\sigma}}{0} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma} \quad \text{id}$$

$$i = \sqrt[3]{i} = i \cdot \frac{1}{2} = (1 \cdot 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{1 \cdot V} > (\frac{1 \cdot V}{1 \cdot V} < |V \cdot V - \overline{V}|)$$

العلاقة (٢١ ـ ١ ـ ٥) توضح بأن نسبة العينـات ذات الحجم المتساوي ن والتي تعطي متوسطا س خارج الفـترة μ $\pm \mu$ تقل عن $\sqrt{}$. ولقـد تم إختيار ك = ن أن بحيث تضيق الفترة عندما يكر حجم العينة، وعندما يصبح حجم العبنة ن كبراً جداً (ن $ightharpoonup ^{\infty}$) فإن إحتمال أن تكون س مختلفة عن μ يؤول إلى الصفر، وفي هذه الحالة يقال بأن س هي تقدير متسق Consistent لمتـوسط المجتمع به، وهو ما سيتم شرحه في الباب السادس من هذا الكتاب.

وإذا كان لدينا مجموعة من التجارب المتكررة المستقلة ن وكان إحتمال النجاح في أية تجربة من هذه التجارب هو ح وكان المتغير العشوائي س = ب حيث رهي عدد مرات النجاح في هذه التجارب المتكررة فإن القيمة المتوقعة والتبين لهذا المتغير هما:

$$(0) = c^{-1}(\frac{c}{c}) = -c$$

$$(0-1-77) \qquad \qquad \frac{7\sigma}{\omega} = \frac{7\sigma}{\omega} = \frac{7\sigma}{\omega}$$

ومن نظرية تشيبتشيف (المعادلة (١٥ - ١ - ٥)) نجد أن

$$2(\left|\frac{c}{c}-2\right|>\sqrt{2(l-2)})<\frac{r_{\lambda}}{c}$$

فإذا أخذنا ك = ن أ فان

$$\int_{0}^{\infty} \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \right| > \frac{\sqrt{2(l-3)}}{c \cdot \frac{1}{2}} > < \frac{l}{\sqrt{c}}$$

وهـذا يعني أن إحتيال إختـلاف النسبة في العينـة، ﴿ ، عن النسبـة الحقيقية في المجتمع، ح، يؤول إلى الصفر عندما يؤول حجم العينة ن إلى ما لا نهاية.

مثال ۳:

إذا كانت نسبة المدخنين بين طلاب الجامعة الأردنية ح ٣٠٠، • ، وأخذنـا عينة من هؤلاء الطلاب حجمها ن = ١٠٠ وكان عدد المدخنين في هذه العينة هـــو ر فإن

وبتطبيق نظرية تشيبتشيف (معادلة رقم (٨ ـ ١ ـ ٥)) فإن

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{|\dot{v}|} - \gamma, \cdot \cdot \right) > \dot{v} \times \sqrt{\frac{17}{|\dot{v}|^{3}}} > c \frac{1}{|\dot{v}|^{3}}$$

وإذا أخذت ك القيم التالية فإن:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) < 1$$

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{\zeta}{\dot{\zeta}} - \tau, \cdot\right| > \gamma \times \sqrt{\frac{17, \cdot}{11}} > \zeta = \frac{1}{3}$$

L = "

$$\Im\left(\left|\frac{c}{c}-\tau,\cdot\right|>\tau\times\sqrt{\frac{17,\cdot}{\cdot\cdot}}\right)<\frac{1}{p}$$

= 5

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{\zeta}{\zeta} - \gamma, \cdot \right) > 3 \times \sqrt{\frac{17, \cdot}{\zeta}} > \zeta$$

٣ – قانون الأعداد الكبيرة

إذا كـان لدينـا ن من الكميـات العشــوائيـة المستقلة س.، س.، س.، س.، بحيث أن القيمة المتوسطة والتباين لكل منهما يساويان ۴، ت على التوالي فــإن الوسط الحسامي لها جميعاً.هو:

$$\frac{\mathbf{r}_{\sigma}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_{\sigma}}{\mathbf{r}^{\sigma}} = (\mathbf{r}_{\sigma}) \text{ if } \mu =$$

وبتطبيق متباينة تشيبتشيف (المعادلة (٨ ـ ١ ـ ٥)) فإن

$$(-1-1)$$

$$(0 - 1 - 1) \qquad \frac{1}{\sqrt{\zeta}} > \frac{\sigma}{\sqrt{\zeta}} \le |\mu - \overline{\mu}|$$

من المعادلة (٣٨ - ١ - ٥) نجد أن إحتال أن تتساوى القيمتان س ، 4 يقترب من الواحد الصحيح إقتراباً كافياً عندما تقترب ن قربا كمافيا من ∞ (أي أن تصبح ن كبيرة كبرا كافيا). وهذه هي أبسط الحالات الخاصة لقانون الأعداد الكبيرة والتي أثبتها عالم الرياضيات تشيبتشيف.

وينص قانون الأعداد الكبرة على ما يلي: مع أن بعض الكميات العشوائية المنفردة تأخذ في الغالب قيما بعيدة عن قيمتها المتوسطة الا أن الوسط الحنسابي لعدد كبر من هذه الكميات العشوائية يتشتت تشتتا صغيرا جداً ويأخذ في المتوسط قيها قريبة جدا من قيمته المتوسطة وباحتهال كبير جداً.

ومن هذه النظرية يمكن أن نستنج بأننا نستطيع الحكم على نوعية كمية كبيرة من مادة متجانسة بواسطة عد صغير نوعاً ما من العينات. فللحكم على نوعية القطن في بالة من البالات أو القمح في شحنة من الشحنات مثلاً فإننا نأخذ عشوائياً عينات صغيرة من أماكن مختلفة من البالة أو شحنة القمح . وتعتبر طريقة الإختيار التي تعتمد على هذا الاختيار العشوائي على درجة كبيرة من الدقة، ذلك لأن كمية القطن أو كمية القمح المأخوذة كمينة ولو كانت ضئيلة بالنسبة للبالة أو شحنة القمح كلها الا أنها في حد ذاتها كبيرة وتسمح تبعاً لقانون الأعداد الكبيرة بالحكم على مواصفات المقطن في البالة أو القمح في الشحنة بدقة كافية.

وبصورة عامة إذا كانت لدينا الكميات العشوائية المستقلة س.، س٠، ٠٠٠٠ وبصورة عامة إذا كانت لدينا الكميات العشورة، وتبايناتها ٢٥،٠٠٠ و٢٥، ٠٠٠٠ من ومتوسطاتها عمر، ١٢٥٠ و٢٥٠ وبياناتها

$$\frac{\partial \mu + \dots + \psi \mu + \psi \mu}{\partial v} = \mu = \frac{-}{(vv)}$$

$$\frac{-}{\sqrt[3]{\sigma}+\ldots+\sqrt[3]{\sigma}+\sqrt[3]{\sigma}}=\frac{-}{\sqrt[3]{\sigma}+\ldots+\sqrt[3]{\sigma}}$$
 تبا (س) = $\sigma_{\overline{\omega}}$

وبتطبيق نظرية تشيبيتشيف (المعادلة (٨ ـ ١ - ٥)) نجد أن

$$(0-1-79)$$
 $\frac{1}{127} > (\frac{1}{127} - 19)$

وذلك بفرض أن ٢٥ لجميع هذه القيم العشبوائية أقـل من مقدار موجب معين مثل ٢١، وهذا الشرط غالباً ما يتحقق بصورة عملية لأننا في معظم الأحيان نتعامل مع كمبات عشوائية من نوع واحـد ولا يختلف تشتت هذه الكميات عن بعضها البعض الا اختلافاً ضئيلاً، أي أن

٤ ـ. نظرية ديموافر

تنص نظرية ديموافر على ما يلي: إذا أخذت عينه عشوائية حجمها ن من مفردات مجتمع كبير جداً (لا نهائي) ووجد بأن ر مفردة من مفردات هذه العينة تحمل صفة معينة باحتهال ح فإنه كلها كبر حجم العينة ن اقترب توزيع العدد ر من التوزيع الطبعي الذي توقعه ن ح وتباينه ن ح (۱ - ح)، أي أن المقدار:

هو متغير له توزيع طبيعي قياسي متوسطه يساوي صفر وتبـاينه يســاوي الواحــد

الصحيح، وبالقسمة على ن بسطا ومقاما نجد أن

$$(0-1-47) \qquad \frac{\overline{\zeta^{-\frac{1}{3}}}}{\overline{\zeta^{-\frac{1}{3}}}} = \underline{\zeta}$$

وهذا يعني أن نسبة المفردات التي تحمل صفة معينة (ر) والمحسوبة من المهينة لها توزيع يقسترب من التوزيع الطبيعي الفي توقعه ح وتباينه ح (۱ - ح) كلها زادت قيمة ن.

ويمكن إثبات هذه النظرية باستخدام الدالة المولدة للعزوم أو الدالة المميّزة.

وترجع إهمية نظرية ديموافر إلى أنها تساعد على تحليل نتائج العينات الكبيرة في حالة المتغيرات النوعية وذلك بتطبيق خصائص التوزيع الطبيعي عليها. وسوف نتعرض لهذا الموضوع بالتفصيل في الباب السادس من هذا الكتاب.

(٢ ـ ١ - ٥) نظرية النزعة المركزية

تحدثنا فيها سبق عن نظرية الأعداد الكبيرة وأثرهما في تقدير معالم المجتمع من العينات الكبيرة ووسوف نتحدث هنا عن نظرية أخرى لها أثر كبير في تطور نـظرية العينات وهي نظرية النزعة المركزية.

 μ إذا كانت m_1 , m_2 , m_3 , m_4 متغيرات عشوائية معتادة ومستقلة بتوقيع μ وتباين σ أي أن π (m_2) = μ , π , π أي أن π (m_2) = μ , π , π أي أن π (m_2) = μ

أما إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة س،، س، ، ، ، ، س لا تتبع

التوزيع الطبيعي، فها هو توزيع مجموع هذه المتغيرات؟ إن نظرية النزعة المركزية والتي ذكرها لابسلاس لأول مرة سنة ۱۸۱۲ تجيب على هـذا السؤال، وفيها يلي نص هـذه النظرية: إذا كـانت س، س، س، سن متغيرات عشـوائية مستقلة ولها نفس التوزيع بتـوقع μ وتبـاين σ ، أي أن ت σ μ ، تبا σ τ τ τ المتغر المشوائي

یکون له توزیع یقترب من التوزیع الطبیعي کلها زادت قیمـة ن، توقعـه ن μ وتباینـه ن σ * .

في مشل هذه الحالة يقال بأن المتخبر العشوائي س لمه تموزيم طبيعي تقاربي Asymptotic Normal وقد تمكن ليابشوف Liapounoff من الوصول إلى برهمان دقيق فذه النظرية تحت شروط عامة لأول مرة سنة ١٩٠١. كيا أنه يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام الدالة المميزة.

هذا ويمكن تطبيق نظرية النزعة المركزية بشكل أشمل، فإذا سحبنا عينة عشوائية حجمها ن من المتغيرات العشوائية المستقلة m_1 ، m_2 ، m_3 ، m_4 متوسطة m_4 وتباينه m_4 بغض النظر عن التنوزيع الذي يتبعه، وكمانت m_4 ، m_4 كميتن عدودتين، فإن المتغير العشوائي

يكون له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بتوقع μ وتباين $\frac{\sigma}{\dot{\upsilon}}$ كلما زاد حجم العينة ن وبالمثل فإن المقدار

$$\frac{\mu - \overline{\sigma}}{\overline{\sigma}} = S$$

يكون له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي كلما زاد حجم العينة ن.

وترجع أهمية نظريـة النزعـة المركـزية إلى أنها تمكننـا من معرفـة توزيـع المعاينـة ______ للوسط الحسابي (س) لعينة مأخوذة من مجتمـع ما دون معـرفة تــوزيع هــذا المجتمع. فإذا كان حجم العينة كبيراً (ن > ٥٠) فإن توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي س يقـترب من التوزيع الـطبيعي كلها زاد حجم العينة، وتعتبر هـذه القـاعـدة من أهم القواعد التي تُبنى عليهـا نظريـة المعاينـة في الإحصاء والتي أفسحت مجـالاً واسعاً أمـام إستخدام المعاينة كوسيلة لدراسة المجتمعات الاحصائية.

الفصل الثاني

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي ببلا شك أهم التوزيعات الإحصائية (المتصلة وغير المتصلة) على الإطلاق وأكثرها استخداماً، حيث أن أكثر الأساليب والطرق الأحصائية تعتمد على هذا التوزيع بشكل أو بآخر. هذا بالإضافة إلى أن التوزيعات الإحصائية المختلفة تنتهي، وعند توفر شروط معينة كها تم شرحه في الفصل الأول من هذا الباب، إلى التوزيع الطبيعي. ويشتمل هذا الفصل والفصل الذي يليه على دراسة التوزيع الطبيعي الذي يعرف بتوزيع العينات الكبيرة Large Samples Distribution وبعض التوزيعات المتصلة به والتي تعرف بتوزيعات العينات الصغيرة Samples Distributions

إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتيال

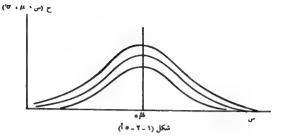
$$(0-\Upsilon-\Upsilon\xi) \qquad \frac{1}{\Upsilon_{\sigma\Upsilon}} = (\Upsilon_{\sigma}, \mu, \varphi) = (\Upsilon_{\sigma}, \mu, \varphi)$$

∞>,,,,>∞-

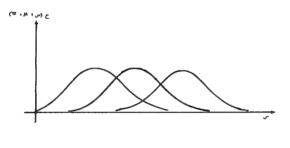
 $\infty > \mu > \infty$

σ > صفر

فإننا نفـول بأن المتغـير العشوائي س لـه توزيـع طبيعي بمعلمتين ٢٠ ، ٥٠ حيث هـا المتوسط والتبـاين على التـوالي. ويمثل الشكـل (١ - ٢ - ٥) منحنى دالـة كشافـة الإحتهال للتوزيع الطبيعي لقيمة واحدة للمتوسط ٤٤. وقيم غتلفة للتباين ٣٠



والشكل (١ ـ ٢ ـ ٥ ب) عمثل دالة كتافة الإحتمال لقيمة واحدة للتبـاين ٢٥ وقيم غتلفة للوسط الحسابي 4

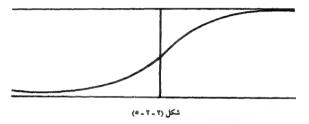


شکل (۱ ـ ۳ ـ ۰ ب)

يتُضح من هذين الشكلين أن منحنى دالـة كنافـة الإحتيال للتـوزيع الـطبيعي: متهائل وذو قمة واحدة وطرفاه يمتدان الى ± ۞ ولا يقابلان المحور السيني بــل يقتربــان منه.

ويطلق على المنحنى الطبيعي أو المعتدل في بعض الأحيان اسم منحنى جاوس Gaussian Distribution نسبة إلى مكتشفه الأول جاوس. وقد اكتشف هذا التوزيع عام ۱۷۳۳ وقد اكتشفه في نفس الوقت كمل من دي موافر De Moivre ولا بلاس Laplace وبسبب تعدد مكتشفي هذا التوزيع أطلق عليه إسم التوزيع الطبيعي أو المعدل

أما دالة الاحتمال التجميعي ح (س) فيمكن حسابها كما يلي:



(٢ ـ ٢ ـ ٥) عزوم التوزيع الطبيعي

يكن حساب العزوم حول الصفر للتوزيع الطبيعي باستخدام المعادلة (٣ - ٢ -٣)

$$\mu' e = \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sigma \sqrt{\sigma}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sigma \sqrt{\sigma}} = 0$$

$$\infty > \infty > \infty$$
 = $\frac{\mu - \omega}{\pi}$ = $\omega > \infty$ = 0

فإن

$$\mu + \omega \sigma = -\omega$$

وبالتعويض في (٣٦ ـ ٢ ـ ٥) فإن

$$(\circ - \Upsilon - \Upsilon \circ)$$
 مر $(\mu + \omega \circ \sigma)$ مر $(\pi \circ \omega + \chi)^{-1}$ دص $(\pi \circ \varphi \circ \chi)^{-1}$

ومن هذه المادلة نجد أن

$$\mu', = \mu$$

$$\mu'_{7} = \sigma' + \mu^{7}$$

$$\mu'_{7} = \sigma' + \mu^{7}$$

$$\mu'_{7} = \sigma \sigma^{2} + \Gamma \mu^{7} \sigma^{7} + \mu^{2}$$

$$\mu'_{3} = \sigma \sigma^{3} + \Gamma \mu^{7} \sigma^{7} + \mu^{2}$$

ومن العلاقات بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الـوسط الحسابي (معادلة

$$\mu_{r} = r^{7}$$
 $\mu_{r} = \omega \dot{\omega}$ (۹۳-۲-۵)
 $\mu_{t} = r^{3}$

وبالتعویض من (۳۹٪ ۲ ـ ٥) في معادلة (۱۰ ـ ۲ ـ ۳) ومعـادلة (۱۱ ـ ۲ ـ ۳) فإن معامل الالتواء والتفرطح کل، که کل، هما

$$\beta = \frac{\mu^{2}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\beta}$$

$$= \phi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\beta}$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\gamma}\mu} = \sqrt{\beta}$$

$$= \frac{\alpha \nu}{\sigma^{2}} = \frac{\sigma^{2}}{\sigma^{2}} = 0$$

أي أن التوزيع السطبيعي متهائل حول السطط الحسابي (β, = صفر) ومعامسل تضرطحه β, = ٣ وهده من أهم خصائص التوزيع السطبيعي حيث بجري حساب معاملي الإلتواء والتفرطح لأي توزيع ومقارنتها بنظيريها في التوزيع الطبيعي.

هـذا ويمكن حساب العـزوم حول الـوسط الحسابي للتـوزيـع الـطبيعي مبـاشرة باستخدام المعادلة (٥ ـ ٢ ـ ٣) كما يلي :

$$\mu_{e} = \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma \sigma}} \sum_{m=1}^{\infty} (m - \mu)^{\infty} \left(\frac{1}{m - m^{2} \sigma} \right)^{m}$$

$$\frac{\mu - \omega}{\sigma} = \frac{\omega}{\sigma}$$

$$(\mu - \omega) = \sigma$$
 فان σ ص σ

وبالتعويض في (٤٢ ـ ٢ ـ ٥) نجد أن

$$\mu_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{7\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} d^{n} d^{n} d^{n} d^{m} d^{m$$

ويلاحظ من (٤٣ ـ ٢ ـ ٥) أن جميع العزوم الفردية حول الموسط الحسابي (من المترتيب و = ٢م + ١ م = ٠ 6 ١ 6 ٢ 6 ٢) تساوي صفراً. أما إذا كسانت و زوجية (من الترتيب و = ٢م 6 م = ٠ ٤ ١ 6 ٢ 6 . . .) فإن

$$\mu_{\gamma} = \frac{\gamma_{\sigma} \gamma}{\sqrt{\pi \kappa}} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \, d\gamma \, d\gamma = 0$$

وبوضع ع = ٦/ ص

وبالتالي فإن المعادلة (٤٤ ـ ٢ ـ ٥) تؤول إلى

$$(\circ - Y - \xi \circ). \qquad \frac{!(\rho^{Y})}{!\rho} \cdot \frac{r^{Y}\sigma}{\rho^{Y}} = \mathcal{H}$$

ومتها يمكن حساب جميع العزوم حول الوسط الحسابي بوضنع م = ° 6 1 6 7

Moment Generating Function الدالة المولدة للمزوم (٣ ـ ٢ ـ ٥)

يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي باستخدام المعادلة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) كما يلي:

$$(-1) \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \cos \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \cos$$

(V3 - Y - 0)

وبإكمال المربع للأس داخل التكامل نجد أن

$$^{\infty}$$
 دس $^{\infty}$ دس

$$(\circ - \Upsilon - \xi \Lambda)$$

 $(\circ - \tau_{\circ})^{\tau_{\circ}} = (\circ) \mu \cdots$

والعزم الواوي حول الصفر هو معامل $\frac{r^2}{e!}$ في مفكوك الدالـة المولـدة للعزوم μ (ت) لجميع قيم وr=0.10 ، r=0.10

(٤ - ٢ - ٥) التوزيع الطبيعي القياسي

Standard Normal Distribution

إذا وضعنا ى = $\frac{\mu - m}{\sigma}$ حيث س متخبر معتاد تـوقعه μ وتبـاينه τ_0 ودالـة كثافة احتياله كيا في المعادلـة (τ_0 - τ_0) فإن القيمـة المتوقعـة للمتغبر العشـوائي ى كتـاوي صفراً وتباينه يساوي واحد.

کها أن دى = د س ، وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (٣٤ ـ ٢ ـ ٥) نجد أن

$$(0-7-01) \qquad 0+2<\infty \qquad -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = (0)$$

ويشار إلى (٥١ ـ ٢ ـ ٥) بدالة كثافة الإحتمال للتوزيع المعتاد القياسي.

ودالة الإحتيال التجميعي للتوزيع المعتاد القياسي تعرف كما يلي:

$$(0.7-0.7)$$
 $\cos^{-1}(1.0.7)$ $\cos^{-1}(1.0.7)$

ولقد أعدت جداول تعطي قيم ى المختلفة والإحتهالات المناظرة طبقاً للعلاقة التالية:

ويمكن باستخدام هذه الجداول في حساب قيمة الإحتمال المقابل لقيمة معينة من قيم ي. وياستخدام خاصية التماثل فإنه من الممكن حساس نوعين من الجداول:

١ _ جداول تجميعية من - ٥٠ الى + ٥٠

٢ _ جداول تجميعية من صفر الى + ∞

وبالنسبة للقيم السالبة لـ ى فإن

$$(0 - Y - 00)$$
 (0) $($

ولهذا فإن كثيراً من الجداول تكتفي بحساب الإحتهالات المختلفة المناظرة لقيم ى الموجبة ومنها يتم استنتاج الإحتمالات المناظرة للقيم السالبة (أي النوع الشاني من الجداول).

مثنال ۱:

إذا كان المتغير العشوائي ي له توزيع طبيعي قياسي وكان المطلوب حساب:

١ _ احتيال أن يكون المتغيري أقل من ٢، أي ح (ي < ٢)

٢ _ احتمال أن يقع المتغيري بين -١٥٢٦ أي ح (-٢ < ي < ١).

فإنه يمكن حساب هذه الإحتمالات بالرجوع إلى جدول رقم (٣) على النحو التالى:

$$1 - 3 (2 < Y) = 3 (-\infty < 2 < 0 = 4) + 3 (0 = 4 < 0 < Y)$$

$$= \frac{1}{Y} + 3 (0 = 4 < 0 < Y)$$

$$= \frac{1}{Y} + 3 (0 = 4 < 0 < Y)$$

مشال ۲:

إذا كان المنفير العشوائي س له توزيع طبيعي بمتـوسط 4 = ٢ وتباين ٣ = ١٦ أه-د:

١ ـ احتيال أن يكون المتغير س أقل من ٥٠ أي ح(س<٥) ٢ ـ احتيال أن يكون المتغير س بين ٣٠ ك ١ ك أي ح(٣٠ص<٦)

الحسل:

إذا كـان المتغير س يتبع التوزيع الطبيعي بمتـوسط $\mu = \gamma$ وتبـاين $\sigma = \frac{\mu}{\sigma}$ يتبع التوزيع الـطبيعي القياسي $\sigma = \frac{\sigma}{\sigma}$ يتبع التوزيع الـطبيعي القياسي بمتوسط $\mu = -\omega$ و σ = 1 ، وعليه فإن:

ومن الجدول رقم (٣) نجد أن ح (س<٥) = ٧٧٣٤.

$$(-7 - \sqrt{-7}) = \sqrt{-7 - \frac{7 - 7}{3}}$$

$$= \sqrt{-7 - \frac{7 - 7}{3}} = \sqrt{-7 - \frac{7 - 7}{3}}$$

$$= \sqrt{-7 - 7 - \frac{7 - 7}{3}} = \sqrt{-7 - \frac{7 - 7}{3}}$$

(٥ - ٢ - ٥) نظريــة:

إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة س، 6 س، 6 س. 6 س، 5 سن تتبع التوزيع الطبيعي، توقعاتها عهر، 4 س/ 6 6 من وتبايناتها ٢٥ أن 6 6 من على التوالي فإن المتغير العشوائي .

 $\nabla_{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} -m_{i}$ to refine $m_{i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} -m_{i}$

البرهسان:

حيث أن كلًا من المتغيرات العشىوائية سرير (ر = ۱ 6 ۲۵ ن) لـ ه توزيــع طبيعي توقعه 40 وتباينه ت⁷ فإن الدالمة المولــدة للعزوم لهــذا المتغير هي كـــها في المعادلــة (-۵ ـ ۲ ـ - ۵).وبما أن هذه المتغيرات مستقلة فإن الدالة المولدة للعزوم لحاصل جمعها هي :

$$\begin{array}{cccc} (\circ - Y - \circ A) & \overset{\nabla}{\nabla} \sigma & \overset{\nabla}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم لمتغي*ر عشوائي معتاد توقعه ع<u>ب الم</u> وتبا*ينه مج^{ني} م^حر

(٢ ـ ٢ ـ ٥) التوزيع الطبيعي ذي المتغيرين

The Bivariate Normal Distribution

تعريف:

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتغيرين س، 6 س، هي:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho-1}\sqrt{\lambda_0}} = (\lambda_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$$

$$= \frac{1}{\tau(1-Q')} \left\{ \frac{1}{(\sigma, -\mu_1)} \left(\frac{-\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right) \left(\frac{-\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right) \left(\frac{-\mu_2 - \mu_2}{\sigma} \right) \left(\frac{-\mu_2 - \mu_2}{\sigma} \right) \right\}$$

$$^{\infty}>_{\sim}$$
 $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$ $_{\sim}$

$$\infty > \mu > \infty < \mu > \infty - \omega > \mu > \infty$$

$$1 > \rho > 1 - 0$$
 صفر $0 < \sqrt[4]{\sigma}$

حث

44 القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س،

عن القيمة المتوقعة للمنتغير العشوائي س٧

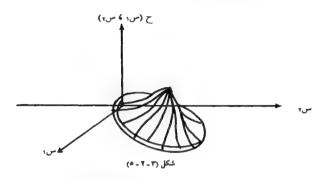
γσ تباين المتغير العشوائي س١

γσ تباين المتغير العشوائي س٧

ρ معامل الارتباط بين المتغيرين س٠١س٠

-فإننا نقول بأن المتغيرين العشوائيين س،6س، لهما تــوزيع طبيعي ثنــائي. وتحقق هذه الدالة شرطى دالة كثافة الإحتيال: ح (س، 6 س،) ≥ صفر

ويعتبر التوزيع الطبيعي ذي المتغيرين من أهم التوزيعـات الثنائيـة وشكل دالـة كثافة احتياله كالجرس المقلوب كها هو مبين في الشكل (٣ ـ ٢ ـ ٥)



ويمكن حساب دالة التوزيع الهامشي Marginal Distribution لكل من المتغيرين س، 6 س× كما يلي:

$$(0 - 7 - 7 - 1)$$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty} (w_1)^3 w_2 \cdot (w_2)^3 \cdot (w_3)^3 \cdot (w_$

وبالتعويض من المصادلة (٨٥ ـ ٢ ـ ٥) في (٦٠ ـ ٢ ـ ٥)، (٦١ ـ ٢ ـ ٥) نجـد أن

$$(0 - Y - Y)$$

وهذا يعني أن دالة كثافة الإحتــال الهامشي لكــل من س٤٠س، هي دالة كشــافة الإحتــال للتوزيع الطبيعي بمتوسط ٤٨٠٤٨، وتباين ٥٤ ٥ ٥٪ لكل منهما على التوالي:

كيا أنه يمكن حساب دالة الإحتال الشرطي Conditional Distribution

للتوزيع الطبيعي الثنائي كما يلي:

$$\frac{\neg (m, m, m)}{\neg (m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m)}{\neg (m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m, m)}{\neg (m, m, m, m)} = \frac{\neg (m, m, m, m)}{\neg ($$

$$\frac{1}{\sigma_{\gamma}} \frac{1}{\sigma_{\gamma}} \frac{1}$$

$$\gamma_{(i,\mu-1)} \frac{\tau^{\sigma}}{\tau^{\sigma}} \rho_{-i\mu-\tau,\nu} \frac{1}{(\tau^{\sigma} - 1)^{\tau} \sigma_{\tau}} \frac{1}{(\tau^{\sigma} - 1)^{\tau} \sqrt{\tau} \pi_{\tau}} = (v_{\sigma} - v_{\sigma})^{\tau}$$

وهذا يعني أن ح (س،/س،) هي دالة كثافة احتبال لتوزيع طبيعي متوسطه $\frac{1}{\sigma}$ $\frac{1}{\sigma}$ $\frac{\sigma}{\tau}$ ρ +، μ وتباينه $\frac{1}{\sigma}$ $\frac{1}{\tau}$ $\frac{\sigma}{\sigma}$ ρ +، μ وتباينه $\frac{1}{\sigma}$ $\frac{1}{\tau}$ $\frac{\sigma}{\tau}$ $\frac{1}{\tau}$ $\frac{1$

الفصل الثالث

توزيعات العينات الصغسيرة Small Samples Distributions

تحدثنا في الفصل السابق عن التنوزيع الطبيعي (تنوزيع العينات الكبيرة) ونتحدث في هذا الفصل عن توزيعات العينات الصغيرة والتي تلعب دوراً رئيسياً في نظرة العينات Sampling Theory

(۱ _ ۳ _ ه) توزيع كأي تربيع X2 - Distribution

أشرنا في الفصل الثاني من هذا الباب إلى أنه إذا كــان المتغير العشــوائي س_{م.} له توزيع طبيعي بمتوسط 4 وتباين ⁷ فإن المتغير العشوائي

ى =
$$\frac{\mu - \eta_0}{\sigma}$$
 له توزيع طبيعي قياسي متوسطه صفر وتباينه ١ .

وإذا كان ى متغيراً معتاداً قياسياً فإن المتغير

ي له دالة كثافة احتمال على الشكل التالي
$$^{\mathsf{v}}\chi$$

$$\sum_{i} (\chi_{i}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\chi_{i}} (\chi_{i})^{\frac{1}{2}}$$

$$(\lambda_{i} - \lambda_{i} - 0)$$

أما إذا كان ي كي متغيرين معتادين قياسيين مستقلين فإن المتغير

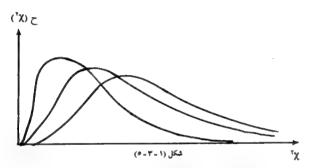
$$\sum (\chi^{\nu}) = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda$$

وبشكل عام إذا كأنت ى، 6 ى، 6 . . . ، ىن متغيرات معتادة قياسية مستقلة فإن المتغر.

$$\ddot{\lambda}_{c} + \dots + \ddot{\lambda}_{c} + \ddot{\lambda}_{c} = \ddot{\lambda}_{c}$$

له دالة كثافة الإحتمال

$$\mathcal{L}(\chi_{\Delta}) = \frac{1}{\lambda_{\Delta}} \sqrt{\frac{c}{\lambda}} \sqrt{\lambda_{\Delta}} \sqrt{\lambda_{\Delta}}$$



العزوم والدالة المولدة للعزوم لتوزيع كأي تربيع

يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم لتوزيع كاي تربيع كما يلي:

$$\mu(c) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{0}^{\infty} dx' \, dx' \, dx' = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{0}^{\infty} dx' \, dx'' \, dx''$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{0}^{\infty} dx' \, dx'' \, dx'' \, dx''$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{0}^{\infty} dx' \, dx'' \, dx$$

ونجد العزوم لتوزيع كأي تربيع من هذه الدالة بحساب الدالة التراكمية Cumulative function (الدالة الـتراكمية عبارة عن لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم للأساس الطبيعي هـ) وذلك على النحو التالى:

لن
$$\mu$$
 (ت / ۳ - ۷۳) لن μ (ت / ۳ - ۷۳)

ومنها نجد أن

.

وتسمى المراكيات Cumulants

$$\Delta = JH = J$$

$$\lambda_{r} = \mu'_{r} - \mu''_{r} = \mu_{r} = \gamma \zeta$$

$$\delta A = -\mu = \Sigma' \mu \gamma + (\mu \cdot \mu \gamma - - \mu) = -\mu$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_3$$

$$\gamma_3 = \lambda_3 \dot{c} + \gamma \mu_3 = \lambda_3 \dot{c} + \gamma i \dot{c}^{\gamma}$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\mu} = \sqrt{\beta}$$

$$\beta_{\gamma} = \frac{\mu_3}{\mu_{\gamma}^{\gamma}} = \frac{\lambda_3 \dot{c} + \gamma_1 \dot{c}^{\gamma}}{3 \dot{c}^{\gamma}} = \gamma + \frac{\gamma_1}{\dot{c}}$$

دالة الإحتيال التجميمي وجداول كأي تربيع

يمكن حسباب دالة الإحتمال التجميعي لتوزيع كأي تربيع كما يلي

$$(3 - 7 - 7) = \int_{0}^{x} (x^{7}) dx$$

ولقد تم حساب المساحة تحت منحنى توزيع كاي تربيع ولدرجات حرية محددة (ن) ورتبت النتائج في جداول إحصائية (جدول رقم (٤)) بحيث يمكن تحديد المساحة تحت المنحنى إذا علمت قيمة χ^{γ} ، كما يمكن أيضاً تحديد قيمة χ^{γ} إذا علمت المساحة تحت المنحنى وذلك لعدد معين من درجات الحرية ن، وفي كلتا الحالتين يجب أن نحدد أيضاً مستوى المعنوية α والذي سنعرفه في باب اختبارات الفروض.

نظرية هامــة:

إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان س، 6 س، يتبعان تـوزيع كـأي تربيع بدرجات حرية ن، 6 ن، على التوالي فإن المتغير العشوائي س = س، + س، له أيضاً توزيع كأي تربيع بدرجات \dot{v} : \dot{v} + \dot{v} ، وتسمى هذه الخاصية القابلية للتجميع Additive Property

البرهسان

نبرهن على صحة هذه النظرية بـاستخدام الـدالة المـولدة للعـزوم لتوزيــع كاي مربيع والمبينة في (٧٢ ــ ٣ ــ ٥)

رت) للمتغير الأول س، = (١ - ٢ت)
$$\frac{\omega}{\tau}$$

$$\mu_{\text{v}}$$
(ت) للمتغير الثاني س $=$ (۱ – ۲ت) μ_{v}

وبما أن س $_0$ س، متغيران مستقلان فإن الـدالة المولدة للعنزوم لحاصـل جمعها $_{r+1}\mu$

$$(\dot{\neg})_{\uparrow}\mu \times (\dot{\neg})_{\downarrow}\mu = (\dot{\neg})_{\uparrow,\downarrow}\mu$$

$$(\circ - \Upsilon - \mathsf{V} \circ) \qquad \qquad (\overset{\circ}{\neg} \Upsilon - \mathsf{V} \circ) =$$

وهذا يمكن تعميم هذه النظرية لأي عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة.

تطبيقات توزيع كأي تربيسع

يستخدم توزيع كأي تربيع في التـطبيق على نـطاق واسع وســوف ننطرق لبعض هذه التطبيقات في البابين السادس والسابع من هذا الكتاب.

t-Distribution توزیسع ت

إذا كانت المتغيرات العشــوائية المستقلة س٤س٠٥ 6 سن تنبـع التوزيــع الطبيعي بمتوسط 4 وتباين ت وأوجدنا القيمة العيارية ي لكل منها فإن

$$\omega = \frac{\omega}{\sqrt{\chi^{2} \dot{\upsilon} - 1}} = \frac{\omega}{\sqrt{\chi^{2} \dot{\upsilon} - 1} \dot{\upsilon}_{i}^{2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\chi^{2} \dot{\upsilon} - 1} \dot{\upsilon}_{i}^{2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\chi^{2} \dot{\upsilon} - 1} \dot{\upsilon}_{i}^{2}}$$

$$(7 - 7 - 9)$$

هو متغیر له توزیع ت بدرجات حریة ن - ۱ و دالة کنافة احتیاله هي
$$-\infty$$
 (ت) = $\frac{1}{\sqrt{(1-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-1)^2}} = \infty$ حن $-\infty$

(0 - T - VV)

وقد اكتشف العالم W.S.Gosset هـذا التوزيع سنة ١٩٠٨ وأطلق عليه اسم ستيودنت Student

وإذا وضعنا ن - ١ = ٧ (تقرأ نيو) للدلالة على عدد درجات الحرية فإن يكن كتابة المعادلة (٧٧ ـ ٣ ـ ٥) كيا يلي:

$$\infty + > \omega > \infty - \frac{\frac{(1+V)}{V}}{V} \left(\frac{V\omega}{V} + 1 \right) \frac{1}{\left(\frac{V}{V} \frac{C_1}{V} \right) \beta \sqrt{V}} = (V + \omega)$$

(0 - T - VA).

ومنحنى هذه الدالـة متهائـل حول الصفـر ويمتد طـرفاه إلى ± © ويفــتربان من المحور الأفقي دون أن يلتقيا به، ويختلف عن التوزيع الطبيعي القياسي بأن تباينه أكبر من واحد (طرفاه مرتفعان عن المحور الأفقي أكثر من طرفي التوزيع المعتاد القياسي).

عسزوم توزيسع ت

بما أن توزيع ت هو توزيع متهائل حول الصفر فإن جميع عـزومه الفــردية حــول الصفر تساوي صفراً، أي أن

$$(^{\circ}-^{\circ}-^{\circ}) = -\mu$$

حيث و = ٢م + ١ 6 م = ١ 6 ١ 6 ٢ 6 ١ . . .

وبالتالي فإن العزوم الزوجية حول الصفر تساوي العزوم الـزوجية حـول الوسط

الحسابي. أي أن

$$(\circ$$
 - ۳ - ۸۰) ت $=$ $_{\infty}$ ح $($ ت $)$ دت $=$ $_{\infty}$

حيث و = ۲م

وبالتعويض من (٧٧ ـ ٣ ـ ٥) في (٨٠ ـ ٣ ـ ٥) نجد أن

$$\mu_{\nu_2} = \frac{(\nu_1 - \nu_1)(\nu_1 - \nu_2) \dots (\nu_{\nu-1})}{(\nu - \nu_1)(\nu_2 - \nu_2) \dots (\nu_{\nu-1})} \cdot \nu_2$$

وحيث أن الوسط الحسابي لتوزيع ت يساوي صفراً فإن عزومه حول الصفر تساوي عزومه حول الـــوسط الحسابي. وإذا وضعنــا م = ١ في المعادلــــ (٨١ ـــ ٣ ـــ ٥)

$$\frac{v}{v-v} = v\mu$$

أما إذا وضعنا م = ٢ فإن

$$\mu_{3} = \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{(\gamma - \gamma)(\gamma - 3)}$$

وبالتعويض في المعادلتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣) 6 (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن

B. = صف

$$(\circ - \Upsilon \cdot \Upsilon) \qquad \left(\frac{\Upsilon}{\xi - \gamma} + 1\right) \Upsilon = {}_{\gamma} \beta$$

ويتضح من المعادلة (٨٢ ـ ٣ ـ ٥) إن تموزيع ت يؤول إلى التموزيع المعتماد القياسي عندما ٧→٠٠٠ (٧>٠١).

دالة الاحتيال التجميعي وجداول ت

يمكن حساب دالة الإحتمال التجميعي لتوزيع ت كما يلي:

ولقد حسبت قیم ت. بی لاحتهالات مختلفة (۱ - α) ولدرجات حریة مختلفة ۷ ورتبت فی جدول یسمی جدول توزیع ت (انظر جدول رقم (٥))

F-Distribution توزيع ف (۳ - ۳)

إذا كنان المتغيران العشواتيان المستقبلان س، ٤ س، معتادين الأول توقعه μ، وتبناينه σ، والشاني توقعه μ، وتبناينه σ، وأحذنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين مستقلتين الأولى حجمها ن، ومشاهداتها س،،، س،، س،، س،، والثانية حجمها ن، ومشاهداتها س،،، س،، س،، س،، س،، والثانية حجمها ن، ومشاهداتها س،،، س،، وسر، ووسطها الحسابي س، وإن المقدار

$$(\Gamma - \Gamma - \Phi)^{\top} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\Phi - \Phi)^{\top}}{\partial x^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\Phi - \Phi)^{\top}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

يتبع توزيعاً يسمى توزيع ف أو توزيع فيشر بدالة كثافة احتهال على النحو التالى:

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}} \times \frac{\sqrt{\frac{v}{v}}(-\frac{1}{\sqrt{v}})}{\sqrt{v}(-\frac{1}{\sqrt{v}})} \times \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}} \times \frac{v}{\sqrt{v}} \times \frac$$

حيث ن. ۱−۱ = ۱۰ درجات حرية البسط، ن۰۰ ≈ ۲۰ درجات حرية المقام.

نحن نعلم من توزیع کای تربیع أن
$$\chi_{i,-1}^{\nabla} = \frac{2 - (m_{I_i} - m_{I_i})^{\nabla}}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\chi_{i,-1}^{\nabla} = \frac{2 - (m_{I_i} - m_{I_i})^{\nabla}}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\chi_{i,-1}^{\nabla} = \frac{2 - (m_{I_i} - m_{I_i})^{\nabla}}{\sqrt{\sigma}}$$

وإذا وضعنا ن. ١ - ١ = ٧، ٤ ن. ٢ - ١ = ٧، فإن المعادلة (٨٦ ـ ٣ ـ ٥) تؤول

$$\dot{\omega} = \frac{\chi_{V_y}^2}{v_y} \div \frac{\chi_{V_y}^2}{v_y}$$

الى

بنفس دالة كتافة الاحتهال المعطاة في المعادلة (١٧-٣-٥) بدرجات حرية ١٧ للبسط، ٧٠ للمقام. أي أن المتغير العشوائي ف هو النسبة بين متغيرين مستقلين كل منها له توزيع كأي تربيع. ومن المعادلة (١٧-٣-٥) يتبين أن دالة كثافة الاحتهال لهذا التوزيع تعتمد على المعلمتين ١٠ ٧٠ والتي تكون عادة أعداداً صحيحة موجبة. ولقد كان العالم سيندكور Sendecor أول من توصل إلى هذا التوزيم واسهاه توزيع (ف) وذلك تكرياً للعالم فيشر Fisher.

عزوم توزيع (ف):

إذا عرّضنا من المعادلة (٨٧ ـ ٣ ـ ٥) في المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٣) فيانه يمكن إثبات أن العزم الواوى حول الصفر لتوزيع ف هو كيا في المعادلة التالية:

$$\frac{(y-y)^{2}+(y-y)^{2}+(y-y)^{2}}{(y-y)^{2}+(y-y)^{2}+(y-y)^{2}}\times \frac{(y-y)^{2}}{(y-y)^{2}}=\frac{y}{\beta}$$

ومنيا نحد أن:

$$\mu_{\gamma} = \frac{v_{\gamma}}{v_{\gamma} - \gamma}$$

$$\mu'_{r} = \left(\frac{v_{r}}{v_{r}}\right)^{y} \times \frac{(v_{r} + \gamma)}{(v_{r} - \gamma)(v_{r} - 3)} = 0$$

$$\mu'_{\tau} = \left(\frac{v_{\tau}}{v_{t}}\right)^{\tau} \times \frac{v_{t}(v_{t} + \Upsilon) + (v_{t} + 3)}{(v_{\tau} - \Upsilon)(v_{\tau} - \Upsilon)} \times \frac{v_{t}(v_{\tau} - \Upsilon)}{(v_{\tau} - \Upsilon)(v_{\tau} - \Upsilon)}$$

$$(?? - ?)^{1} \times \frac{(?? - ?) (?? + ?) (?? + ?)}{(?? - ?) (?? - ?) (?? - ?)} \times \frac{(?? - ?)}{(?? - ?) (?? - ?)} \times \frac{(?? - ?)}{(?? - ?)} \times \frac{(?? - ?)}{(??$$

$$\mu_{y} = \gamma \left(\frac{v_{y}}{v_{y} - \gamma} \right)^{y} \times \frac{(v_{r} + v_{y} - \gamma)}{v_{r} (v_{y} - 3)}$$

$$\mu_{y} = \lambda \left(\frac{v_{y}}{v_{y} - \gamma} \right)^{y} \times \frac{(\gamma V_{r} + V_{y} - \gamma) (V_{r} + V_{y} - \gamma)}{v_{r}^{y} (v_{y} - 3) (v_{y} - \gamma)}$$

$$(\gamma P - \gamma - \gamma)$$

وإذا عوضنا من (٩٣ ـ ٣ ـ ٥) في (١٠ ـ ٢ ـ ٣) نجد أن:

$$\beta_{\ell} = \frac{\lambda \left(\gamma \ v_{\ell} + v_{\gamma} - \gamma \right)^{7} \left(v_{\gamma} - 3 \right)}{v_{\ell} \left(v_{\gamma} - \Gamma \right)^{7} \left(v_{\ell} + v_{\gamma} - \gamma \right)}$$

دالة الاحتيال التجميعي وجداول ف:

يمكن حساب دالة الاحتمال التجميعي لتوزيع ف٧٠،١٠. كما يلي:

ولقد تم حساب المساحة تحت منحنى تنوزيع ف٧٠.٧٠ ووضعها في جداول إحسائية بحيث يمكن تحديد المساحة تحت المنحني إذا علمت قيمة ف٧٠ ك ٧٧ كما يضاً تحديد قيمة ف٧٠ ٧ ٧٠ إذا علمت المساحة تحت المنحني وذلك لعدد معين من درجات الحرية ٧، ٤ ٧٠ (أنظر جدول (٦)). وهنالك تطبيقات واسعة لتنوزيع في نظرية الإحصاء ندرس بعضها في الباين السادس والسابع من هذا الكتاب.

أسئلة وتمارين (٥)

- (٢ ٥) لدراسة مت سط مدة خدمة البطاريات الجنافة من الحجم المتنوسط والذي تنتجه إحدى الشركات المحلية سحبنا عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة حجمها ١٠٠ بطارية. فإذا علمنا بأن مدة خدمة البطارية الواحدة من إنتاج هذه الشركة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٦٠ سناعة وتبناين ٢٥ (سناعة).

استخدم نظرية تشيبتشيف الإيجاد احتمال أن يزيد الفرق المطلق بين متوسط العينة العشوائية ومتوسط المجتمع عن ك α لقيم

0 · · 6 Y · · 6 1 · · = 3

ثم تحقق من أن الفـرق المطلق بينهـما ينتهي إلى الصفـر عنـدمـا تصبـح ن كبرة.

- (٤ ٥) إذا كان وزن الطفل الذكر (س) عند الولادة في إحدى المدن يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٢٩٠٠ غرام وتباين ١٠٠٠٠ (غرام)^٢،

استخدم جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات التالية:

۱ ـ ح (س ≥ ۳۰۰۰)

۲ ـ ح (س ≤ ۲۷۰۰)

٣۔ ح (۲۹۵۰ ≤ س ≤ ۳۱۰۰)

(٥ ـ ٥) إذا كان توزيع الدخول (س) في مدينة ما طبيعياً بتوقع يساوي ٢٠٠ دينار
وتباين يساوي ٢٥ (دينار) ، أوجـــد:

۱ _ ح (س ≤ ۱۹۵)

۲ - ح (۱۹۵ ≤ س ≤ ۲۰۵)

٣ ـ ح (س ≥ ٢٠٠)

وإذا اخترنا عينـة عشوائيـاً من هذه المـدينة عـدد مفرداتهـا ٥٠٠، أوجــد عدد المفردات التي يقع دخلها بين ١٩٨، ٢٠٢ دينار.

- (۱- ٥) إذا كان وزن ثمرة البرتقال في إحدى المزارع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٢٠٥ عم وانحراف معياري ١٠ غم. ما هو احتيال أن يقل وزن البرتقالة عن ١٨٥ غم؟ وما هو احتيال أن يزيد عن ٢٢٥ غم. وإذا كانت شروط التصدير تقتفي أن لا يقل وزن البرتقالة عن ١٨٥ غم وكان إنتاج المزرعة ١٠٥٠ طن، فكم طناً منها تنطبق عليه شروط التصدير؟
- (٧ ٥) لدراسة وزن البيضة الذي تنتجه إحدى المرع سحنا عينة عشوائية
 حجمها ١٦٠ بيضة، فإذا علمت من دراسة سابقة أن وزن البيضة الذي
 تنتجه هذه المنزعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٩٢ غم وتباين ٣٦
 (غرام) ١٠ احسب الا- تهالات التالية:

١ ـ ح (س ≥ ٩٤,٥ غم)

۲ - ح (س ≤ ۹۰ غم)

٣ - ح (٩١ غم ≤ س ≤ ٩٣ غم)

حيث س متوسط وزن البيضة للعينة العشواليه

(٨ ـ ٥) إذا كان أجر العامل الأسبوعي (س) في مصنع مه , يتبع تـوزيعاً طبيعياً
 توقعه ٣٠ دينار وانحرافه المعياري ٥ دنانير، أوج :

- ١ نسبة العيال الذين تتراوح أجورهم الأسبوعية بين ٢٠، ٣٥ دينار.
 ٢ ـ المئين العاشر والربيع الأدنى للأجور.
 - ٣ ـ الأجرين الذين يقع بينهما ٩٥٪ من أجور العمال في هذا المصنع.
- (٩ ٥) إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ٦٠ وانحراف معياري ٨ والمتغير العشوائي ص يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ٦٠ وانحراف معياري ٦ وكان المتغيران مستقلين وعرفنا متغيراً ثالث ع كها يل:
 - ع = س + ص
 - ١ ـ أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغيرع
 - ۲ _ أوجد ح (ع < ١٠٠)
- (١٠ ـ ٥) إذا علمت أن أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع موزعة
 توزيعاً طبيعاً عنوسط ٥٠٠ ساعة وانحراف معيارى ٢٠ ساعة ، أوجد:
 - ١ ـ نسبة المصابيح التي يتراوح عمرها بين ٥٥٠، ٥٥٠ ساعة
 - ٢ .. نسبة المصابيح التي يزيد عمرها عن ٢٠٠ ساعة
 - ٣ ـ نسبة المصابيح التي يقل عمرها عن ٤٠٠ ساعة
 - ٤ ـ العمر الذي يعمّر أقل منه ٩٥٪ من المصابيح.
- (۱۱ م) إذا كان المتغير العشوائي ى له تـوزيع طبيعي قيـاسي، أوجد الاحتـالات
 التالية:
 - ۱ ح (ی ≥ ۱۹۹۱)
 - ۲ ح (ی ≤ ۲,۰۷۱)
 - ٣- ح (ي ≤ ١,٦٤٥)
 - ٤ ح (- ١,٦٤٥ ≤ ي ≤ ٢,٥٧٦)
- (١٢ ٥) لدراسة وزن الرغيف الذي ينتجه أحد الأفران، سحبنا عينة عشوائية من إنتاج هذا الفرن حجمها ٢٦ رغيفاً، فإذا كان متوسط وزن الرغيف في العينة س (غير معلوم) وتباين العينة ع = ٢٥، باستخدام جداول توزيع (ت) أوجد الاحتيالات التالية إذا علمت بأن متوسط وزن الرغيف من إنتاج هذا الفرن = ١٨٥ غم:

(١٣ _ ٥) باستخدام جدول توزيع كأي تربيع، أوجد قيم ما يلي:

C. TO LET X & C. AVO LITS X 6 C. AD LT 5 X

C.440 CT-5 X 6C.44 CO-5 X

(١٤) باستخدام جدول توزيع ف أوجد قيم ما يلي:

فسردی دوی در ۵۰ فسالای وی در ۵۰ فسالای دوره

فردی دی ورد کا فری دری

(١٥ ـ ٥) إذا كان المتغير العشوائي ى يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، بـاستخدام جداول هذا التوزيع، أوجد قيمة & التي تحقق ما يلي:

جداون هدا التوزيع، اوجد فيه. ۱ ـ ح (ي ≥ ي*) = ۰٫۱۰

۲ - ح (ی ≤ ی*) = ۵۰,۱

۳ ـ ح (ی ≥ ی*) = ۰,۵۰

٤ - ح (ي ≤ ي*) = ٥٧, ٠

ه ـ ح (ى ≥ ى*) = ١٩٩٥،

٠,٠٢٥ = (٥ ≥ ي٠) = ٢٠٠٠

(١٦ - ٥) إذا كان المتغير العشوائي ت يتبع توزيع ستيودن، باستخدام جداول هذا
 التوزيع أوجد قيم ت* التي تحقق ما يلي:

۱ _ ح (ت ≥ ت*،) = ٥٠, ٥

۲ _ ح (ت ≤ ت*.۶) = ۰٫٥٠

٣ ـ ح (ت ≥ ت*.١٢) = ٢٥٠,٠

٤ ـ ح (ت ≤ ت٠٠٤) = ٩٧٥,٠

٥ _ ح (ت ≽ ت*، ۱ = ۱٫۰°

إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^{*} .

بالاستعانة بجداول التوزيع الطبيعي القياسي، أوجد قيمة الشابت أ التي
تحقق العلاقات التالية:

• , ۱۸۲۲ =
$$(\sigma + \mu > -1)$$

$$\cdot$$
, ۹۰٤٤ = $(\sigma i + \mu > - \gamma + \alpha i - \mu)$ - ۲

•, 9970 =
$$(\sigma \mid +\mu > 0) > \sigma \mid -\mu)$$

$$^{\circ}$$
 , ۱۳ = (σ أ - μ < ص - ٤

$$^{\circ}$$
 , ۹۷۷۲ = (σ أ $-\mu$ $<$ ه $_{-}$ ح (س

: (۱۸ ـ ۵) إذا كـان المتغير العشـوائي س له تـوزيع طبيعي متـوسطة μ وتبـاينه σ^{V} . اثبت أن ى = $\frac{\mu - \mu}{m}$ هـو متغير عشـوائى له تـوزيـم طبيعى متـوسط

(٥- ١٩) إذا كان المتغير العشـوائي س له تـوزيع طبيعي متـوسطه μ وتبـاينه ٢٥ (٥- ١٩)

أثبت أن س = ج<u>ـ س.</u> هو متغير عشــوائي له تــوزيع طبيعي متــوسطه

نا کان المتغیرات العشوائیان χ''_{λ} که χ''_{λ} لما توزیع کأی تربیع بـدرجات حریة ن، ک ن، علی التوالی، أثبت أن:

 $\chi'' = \chi'' + \chi'' + \chi''$ هو متغير عشوائي له توزيع كأي تربيع بدرجات حرية $\dot{\chi}$ + $\dot{\chi}$ + $\dot{\chi}$ هذا التوزيم . هذا التوزيم .

الباب السادس

التقدير Estimation

نواجه في كثير من الأحيان مشكلة تقدير ثوابت Constants معين من بيانات عينة مأخوذة من هذا المجتمع. وقد عالجنا هذا الوضع بشكل وصفي مبسط أثناء دراستنا لبعض المبادىء الأساسية في علم الإحصاء، حيث اعتبرنا أن العزوم والأوساط ومقاييس التشتت ومعاملي الإلتواء والتفرطح تقديرات جيدة لنظيراتها في مجتمع المدراسة وبشكل خاص إذا كان حجم العينة كبيراً، ولم نتصرض في حينها لدراسة خواص المقدّر الجيد وإمكانية الحصول عليه إن وجد. وفي هذا الباب فإننا ندرس كيفية الحصول على مثل هذه المقدّرات، ولتحقيق هذا الهدف فإنه لا بدّ من الاعسار الدراسة على العينات العشوائية Random Samples.

ولتوضيح المقصود بالمقدّر Estimator والتقدير Estimato فإننا نبداً بحالة معلمة واحدة. فإذا كان المجتمع من موزعاً توزيعاً يعتمد على المعلمة θ ، أو بتعبير آخر إذا كان المجتمع (المتغير) من له دالة كثافة استهان ح ($m \ge \theta$) وأخذنا عينة عشوائية من كان المجتمع مفرداتها من λ من λ من الإرقام ، باستخدام هذه المشاهدات ، بحيث يمكن استخدامه كقيمة للمعلمة θ أو منى من الأرقام ، باستخدام هذه المعلمة. ومن المعلوم أن المشاهدات من λ من λ من λ من λ من تعيرات عشوائية وكمل دالة في هذه المشاهدات متغير عشوائي وتسمى عبارة عن متغيرات عشوائية وكمل دالة في هذه المشاهدات متغير عشوائي وتسمى والوسيط والمنوال والإنحراف المعياري ومعاملي الإلتواء والتفرطح ومعامل الارتباط وغيرها احصاءات أو مقايس إحصائية . وحيث أن العينة جزء من كل فإننا لا نتوقع وغيرها الحصائي قيمة مساوية لمعلمة المجتمع في كل وقت ولكل عينة ، وأقمى ما نهدف إليه هو الحصول على صيغة إحصائي يعطي قياً جيدة في المترسط أو عمل المد

البعيد وعلى هذا فإننا لا نرفض مقياساً إحصائياً لأنه يعطي قيمة غير جيدة في حالـة معينة.

Estimator ويجب التمييز بين الصيغة الرياضية للإحصاء والتي تسمى مقدّراً والقيمة التي نحصل عليها بعد التعويض في هذه الصيغة لقيم المشاهدات وتسمى تقديراً estimate فصيغة الوسط الحسابي $\frac{2^{-1}}{i}$ تسمى مقدّراً، أما إذا اخترنا وعينة عشوائية من مجمّن مفرداتها Y, Y, 0, * , * 0 وعوضنا قيم هذه المشاهدات في صيغة الوسط الحسابي فإن $\frac{Y+Y+0+1+0}{0}=Y$ تسمى تقديراً. وكمشال آخر فإن الصيغة التي نعرف بها المنوال بطريقة الفروق تسمى مقدّراً، أما إذا استخدمنا هذه الصيغة لحساب المنوال من جدول تكراري معين فإن القيمة التي نحصل عليها تسمى تقديراً. وندرس في هذا الباب التقدير بنقطة والتقدير بفترة ثقة.

الفصل الأول

التقدير ينقطة Point Estimation

التقدير بنقطة عبارة عن قيمة واحدة نحصل عليها من بيانات العينة باستخدام مقدّر معين نقدّر به معلمـة المجتمع. فمثلًا الـوسط الحسابي للعينـة س = مجـسمقدّر منقطة لأنه يزودنا بقيمة واحدة كتقدير لمتوسط المجتمع، وتباين العينة ع" = أ عن اس - س الم مقدر بنقطة يزودنا بقيمة واحدة كتقدير لتباين المُجتَمع . وسوف ندرس في هذا الفصل بشيء من التركيز خواص المقدّر الجيد وطرق التقدير ، حيث أنه تتعدد في علم الإحصاء المقدّرات للمعلمة الواحدة ، فمتوسط مجتمع معتاد 11 يمكن تقديره من بيانات عينة باستخدام الوسط الحسابي ، أو الوسيط، أو المنوال، الخ وكذلك الاختلاف أو التشتت في مجتمع ما يمكن تقديره بعدد من المقدّرات أيضاً مثل الإنحراف المعياري ، المدى ، . . . النَّج والأسئلة التي تطرح في مثل هذه الحالات: ما هو المقدر الجيد ؟ وما هي المعايير التي تستخدم في المفاضلة بين المقدرات المختلفة ؟ وقد اعتمدنا في مبادىء الإحصاء على أساليب وصفية بسيطة في المفاضلة بين المقدّرات المختلفة ، ولكننا نعتمد في تقييم المقدّر في دراستنا الحالية ، على أساليب رياضية تعتمد أساساً على التوزيعات الإحتمالية وخصائص هذه التوزيعات.

(١-١-١) خواص المقدر الجيد

من أهم خواص المقدر الجيد:

Unbiasedness ١ _ عدم التحيز

٢ .. الاتساق Relative Efficiency ٣ _ الكفاءة

Consistency

Sufficiency

٤ _ الكفاية

وندرس هذه الحواص بشيء من التفصيل ولكن يجب التأكيد منـذ البدابـة على أنه يصعب، في غالب الأحيان، الحصول على مقدّر تنوفر فيه جميع هذه الحواص.

(١ - ١ - ١ - ١) عدم التحيز

مثال ١:

إذا فرضنا أن لدينا مجتمعاً حجمه $\dot{v} = 0$ ومفرداته هي ٢ ٤ ٢ ٤ ٥ ٥ ٥ وأردنا أن نحقق حسابياً أن الوسط الحسابي للعينة $\dot{v} = \frac{z-m}{\dot{v}}$ غير متحيز لتوسط المجتمع عم وأن التباين للعينة $\dot{v} = \frac{1}{\dot{v}-1}$ عجد $\dot{v} = \frac{1}{\dot{v}-1}$ على النحو التالى: المجتمع فإنه يمكن تحقيق ذلك باختيار عينات بأحجام غتلفة على النحو التالى:

الحالمة الأولى: حجم العينة ن = ٢، عـد العينـات الممكنـة = "ق، = ١٠، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبيّنة في الجدول التالى:

التباين من العينة	الوسط الحسابي	الميئة
(^y E)	للمينة (س)	
•,0•	1,0	7.1
۲,**	٧,٠	۲،۱
٤,0٠	٧,٥	1.3
۸,۰۰	٣,٠	0.1
•,0•	٧,٥	٣.٢
۲, • •	٣,٠	7.3
£,0°	۳,0	7.0

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية = $\frac{0.0}{10}$ ويساوي متوسط المجتمع وهذا عقق أن س مقدّر غير متحيز للمعلمة μ .

الوسط الحسابي للإنحرافات المعيارية = $\frac{70}{10}$ ويساوي تباين المجتمع وهذا يحقق أن 5^7 مقدّر غير متحيز للمعلمة 5^7 .

الحالة الشانية: حجم العينة ن = ٣، عدد العينات الممكنة = "ق» = ١٠، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبينة في الجدول التالي:

التباين من المينة (ع ^٢)	الوسط الحسابي للمينة (س)	الميئة
1	Y	T6761
r	Y 1	26761
7 3	Y Y	06761
7 7	Y - Y	86861
٤	٣	06861
7 3	4. L	06861
١	٣	2 6 7 6 7

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية = $\frac{r^*}{1^*}$ = π ويساوي متوسط المجتمع μ وهذا محقق أن m مقدّر غير متحيز للمعلمة μ .

الـوسط الحسابي لـلانحرافـات المعياريـة = $\frac{70}{10}$ ويساوي تبـاين المجتمع $\frac{70}{10}$ وهذا مجقق أن ع 7 مقدّر غير متحيز للمعلمة $\frac{70}{10}$.

الحالة الشالشة: حجم العينة ن = ٤، عـــد العينــات الممكنــة = °ق، = ٥، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبينّة في الجدول التالي:

التباين من	الوسط الحسابي	العينة
المينة (ع ^٢)	للعينة (س)	
1,777	۲,0۰	1676761
77177	٧,٧٥	0686861
7 , 777 7	٣,٠٠	0686761
7,9177	٣, ٢٥	0686861
יידר, ו	٣,0٠	0686464
۱۲,0۰۰۰	10, **	المجموع

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية $= \frac{10}{0} = \%$ ويساوي متوسط المجتمع $\frac{10}{0}$ وهذا يحقق أن $\frac{1}{0}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\frac{1}{0}$.

الوسط الحسابي للإنحرافات المعيارية = 17,0 ويساوي تباين المجتمع ٥٠ وهذا يحقق أن ٢٠ مقدّر غير متحيز للمعلمة ٢٥ و

مثال ۲ :

- ع<u>ن</u>سس اثبت أن الوسط الحسابي للعينة س = <u>سَرَّ بِ</u> مِنْ مَعْمِر مَعْمِر لمُوسط

 μ الجتمع

$$\frac{\mu \frac{\partial e}{\partial x}}{\partial \dot{y}} = \frac{(\partial u)^{2} \frac{\partial e}{\partial x}}{\dot{y}} = \frac{(\partial u)^{2} \frac{\partial e}{\partial x}}{\dot{y}} = \frac{(\partial u)^{2}}{\dot{y}} = 0$$

$$\mu = \frac{\mu \dot{y}}{\dot{y}} = 0$$

-

ت (س) - H = H = صفر

وهذا يحقق المعادلة (١ ـ ١ ـ ٦)، أي أن $\overline{ }$ مقدّر غير متحيز للمعلمة μ .

مثال ۳:

تباين العينة المعرّف كما يلي

مقدّر متحيز لتباين المجتمع تن ويمكن إثبات ذلك كها يلي:

وبالقسمة بسطا ومقاماً على ٢٥ فإن

$$\left(\frac{\overline{(\sigma^{-},\sigma)} \stackrel{\mathcal{S}}{\rightarrow} 0}{\overline{V}_{\sigma}}\right) \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} \frac{\overline{V}_{\sigma}}{\overline{U}} = (\overline{V}_{\varepsilon}) \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0$$

$$(\overline{V}_{\varepsilon}) \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0 \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0$$

$$\overline{V}_{\sigma} (1 - U) \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0$$

$$\overline{V}_{\sigma} \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0 \stackrel{\mathcal{T}}{\rightarrow} 0$$

أي أن ع٢ المعرفة بالصيفة السابقة مقدر متحيز للمعلمة ٣٥ ومقدار التحيز طبقاً للمعادلة
 ٢ - ١ - ٢) هو

من الملاحظ أن

$$\dot{\phi} = \left(\frac{{}^{\forall}\sigma}{\dot{\sigma}} - \right) \bigsqcup_{\varpi \leftarrow \dot{\sigma}} \dot{\tau}$$

أي أن مقدار التحيز يقل كليا زاد حجم العينة.

أما إذا عرفنا ع" على النحو التالي:

فإن ت (ع") = قان

أي أن ع المعرّفة بهذه الصيغة مقدّر غير متحيز للمعلمة ٢٥٠

المقلّر المتسق هو الذي تتناقص فيه المخاطرة بزيادة حجم العينة، ويتعبير آخر فإن المقلّر المسق هو الذي يعطي تقذيراً أفضل، إذا كان محسوباً من عينة حجمها ٥٠ مشاهدة من التقدير الذي يعطيه إذا كان حجم العينة ٣٠ مشاهدة.

فإذا فرضنا أن المخاطرة في اختيار مقدّر يعتمد على بن مشاهـدة، δُر، للمعملة θ هي

وإذا فرضنا أن لدينا سلسلة من التقديرات التي نحسبها باستخدام هذا المقدّر

من عينات أحجامها ٣٠٢،١، ٣٠٠، ر، ن فاينه يمكن وضع فكرة الإتساق على النحو التالى:

$$(3-1-\xi)$$
 = 0

أي أن

وبصيغة أخرى يكون المقدّر متسقا كلما تضامل الفرق، بين التقـديـر الـذي نحصل عليه باستخدام هذا المقدّر وقيمـة المعلمة الحقيقيـة، بزيـادة حجم العينة، أي أن:

$$\int_{0}^{\infty} \left(\left| \hat{\theta}_{c} - \theta \right| > \delta \right) < \xi$$

حيث δ قيمة محدة، ﴿ قيمة صغيرة جداً

أو

$$(1-1-7)$$
 صفر $(\hat{\theta}_{i}-\theta) > \delta$ = صغر

أي أن المقدّر $\hat{\theta}$ متسق للمعلمة θ إذا كمانت $\hat{\theta}$ تتقارب تقمارهاً إحسالياً Convergence in Probability إلى المعلمة θ كليا زاد حجم العينة ن

ويمكن تـوضيح فكـرة الانساق حسابياً بـاستخـدام نتـائـج مثــال ١ في الفقـرة (١ - ١ - ١ - ٦):

أولًا: الوسط الحسابي للعينة س كمقدّر متّسق لمتوسط المجتمع.

الحالة الأولى (حجم العينة ن = ٢): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع 4 وأقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة س = ١,٥

الحالة الثانية (حجم العينة ن = ٣): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع للم مراقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة س = ٠,١

الحالة الثالثة (حجم العينة ن = ٤): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع μ وأقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة $\overline{u} = 0$.

الحالة الرابعة (حجم العينة ن0 = 0، الحصر الشامل): قيمة متموسط المجتمع 0 = 0

يلاحظ مما سبق أن قيمة الفرق تتضاءل كلها زاد حجم العينة وهذا يدل عـلى أن الوسط الحسابي للعينة س مقدّر متسق لمتوسط المجتمع "

ثانياً تباين العينة ع للمعتمر متسق لتباين المجتمع.

الحالة الأولى (حجم العينة ن = Y): الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع ٥٥ وأقبل قسيمة استبايس العبيسة

. Y = * , 0 - Y , 0 = TE

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع ٥٠ وأكسر قسيمسة لستبايسن العسيسة ٥٠ - ٥ - ٥ - ٥

ع * = ٥, ٢ - ٥, ٤ = ٢.

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع 7 وأقسل قسيمسة لستبسايسن العسيسنسة $^{7}=0$, 0

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع ٢٥ وأكبر قيمة لتباين العينة الحالة الثانية (حجم العينة ن = ٣):

 $y = 0, y = \frac{y}{r} = 3$

الحالة الثالثة (حجم العينة ن = ٤):

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع 7 وأقسل قسيمسة لستبسايسن المسيسنسة 2 = 7 - 7 - 8 .

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع 7 وأكبر قسيمسة لستبايس العسيسة 3 = 7 - 7 - 9 - 9 .

الحالة الرابعة (حجم العينة $\dot{v} = 0$ ، الحصر الشامل): قيمة نباين المجتمع $\dot{v} = \dot{v}$ = قيمة تباين العينة ع. "

يلاحظ مما سبق أن قيمة الفرق تتضاءل كلها زاد حجم العينة وهذا يدل على أن تباين العينة ع\ مقدّر متسق لتباين المجتمع. مثال: يمكن أن نثبت رياضياً أن الوسط الحسابي للعينة س مقدّر متسق لمتوسط المجتمع ماستخدام نظرية تشييشيف، والمعرفة بالمعادلة (٢١ - ١ - ٥)، على النحو التالى:

إذا كان مجتمع الدراسة غير محدود أو كانت المعاينة مع الإعادة.

$$\frac{1}{|\vec{v}|} > (\frac{\sigma}{|\vec{v}|} < |\mu - \vec{v}|)$$

مفر = (
$$\xi \leq |\mu - \overline{m}|$$
) = صفر ...

أي أن س مقدّر متسق للمعلمة **س**

(٢-١-١-٣) الكفاءة النسية

إذا كان المتغير س له دالة كتافة إحتىال ح (س؛ heta) بمعلمة واحدة heta وكان $\hat{ heta}$, $\hat{ heta}$, مقدرين غير متحيزين للمعلمة heta ، فإننا نقــول أن $\hat{ heta}$, اكفأ من $\hat{ heta}$, إذا

(A-1-1) کان تا ر $(\hat{\theta}_y)$ ج تیا ر $(\hat{\theta}_y)$ کان تا ر

$$1 > \frac{(\sqrt{\theta})}{(\sqrt{\theta})}$$

Measure of Efficiency مقياساً لكفاءة (١- ٩- ٦- ١) تعطي مقياساً لكفاءة والمعادلة ($\hat{\theta}$, وكان تباينه أقبل من المقدّر $\hat{\theta}$, وبالنسبة إلى $\hat{\theta}$. وإذا وجد مقدّر غير متحيز فإننا نقول أن $\hat{\theta}$. -Minimum Variance Un- تباين أي مقدّر أخر غير متحيز فإننا نقول أن $\hat{\theta}$. -biased Estimator of $\hat{\theta}$ (M.V.U)

وإذا وجد المتغير الكفء فهو وحيد Unique ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

إذا كان $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$ مقدرين كفؤين غير متحيزين للمعلمة θ فإن

ومن المعادلة (١٠ ـ ١ ـ ٦) فلا بد وإن β. = صفر، وبالتعويض عن قيمتها في المعادلة (١٧ ـ ١ ـ ٦) فإن

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

مثال: إذا كان المتغير س له توزيع طبيعي بتوقع μ وتباين ∇ 0 وأخذنا من هذا المجتمع عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة حجمها ن، فإن تـوزيع المعـاينة للوسط الحسابي هذه العينة ($\overline{\nu}$ 0 هو التوزيع الطبيعي Exactly Normal Distribution بتوقع $\overline{\nu}$ 0 وتباين $\overline{\nu}$ 0 ، وتوزيع المعاينة لوسيط هذه العينة (و) هو التوزيع الطبيعي Asymptotically Normal Distribution بالتقريب Asymptotically Normal Distribution بتـوقع $\overline{\nu}$ 0 وبالتالي فإن الكفاءة النسبية للوسط الحسابي بالسبة للوسيط هي:

$$1 > 0$$
, $1 \neq 0$ $\frac{7}{3} = \frac{7}{3} = \frac{7}{3} = \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

أي أن الوسط الحسابي أكفأ من الوسيط لأن تباينه أقل.

(١-١-١-٤) الكفاية

إذا كان $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, مقدرين للمعلمة $\hat{\theta}$ فإن $\hat{\theta}$, مقدّر كاف للمعلمة إذا كان ح ر $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$) = $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$) = $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$) ح ر $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$) $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$)

وحيث أنه يصعب تحقيق الشرط الوارد في المعادلة (١٨ - ١ - ٦) مسواء كمان المقدّر كافيا أم غير كاف، فإننا نستخدم طريقة Neyman والتي تسمى أحياناً طريقة التجزئة Factorization Method وعكن صياغتها كيا يلي:

والمقدّر $\hat{\theta}$, كاف للمعلمة θ إذا أمكن تجزئة دالة الإمكان Likelihood المحدد على المعلمة والمقدّر والآخر لا يعتمد على المعلمة والمقدّر والآخر لا يعتمد على المعلمة .

فإذا رمزنا لدالة الإمكان بالرمز لـ وكانت دالة كثافة الأحتيال تعتمد عـلى معلمة واحدة 6 فإنه يمكن كتابة قاعدة التجزئة رمزيا كيا يلي:

دالة الأمكان Likelihood Function

عكر صباغة دالة الإمكان بشكل عام كما يلي:

إذا كانت س،، س،، س، مسن مجموعة من المشاهندات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثالة احتهال ح (س؛ θ) تعتمد على معلمة واحدة θ ، فإن:

وتسمى دالة الإمكان أبضاً دالة الكثافة المستركة Joint Density Function فمشلًا إذا كان المتغير س يتبع تــوزيعــاً طبيعيــاً بمتــوسط عم (غــير معلوم) وتبــاين ٢٥ (معلوم) فإن دالة الإمكان الأكبر

مثال ١

إذا كانت س١، س٠، ٠٠٠ سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع معتاد توقعه μ وتباينه σ = ١ فإنه يمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة باستخدام المعادلة (٢٠ ـ ١ - ٦)، كما يلي:

وبالتعويض في دالة الكثافة المشتركة فإن:

$$L(\mu, l, l, m) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma \sqrt{l}}}\right)^{2} = \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)^{2} = \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{1}{$$

وحيث أنه يمكن تجزئة دالة الإمكان إلى جزئين:

 $\frac{\omega}{1} = \frac{\omega}{1-1} \cdot \frac{\omega}{(m-1)}$ الأول: لـ $(m \cdot m) = a - \frac{\omega}{1-1} \cdot \frac{\omega}{(m-1)}$ يعتمد على المعلمة والمقدر س

 $\frac{1}{|\mathcal{C}_{q_1}|} = \frac{1}{|\mathcal{C}_{q_2}|} = \frac{1}{|\mathcal$

لا يعتمد على المعلمة.

وباستخدام نظرية نيهان Neyman

فإنه يمكن القول أن س مقدّر كاف للمعلمة عم.

مثال ۲

إذا كـانت س،، س،، س،، س، عينـة عشـوائيـة من المشــاهـدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة إحتيال

$$\infty > \infty > صفر < \infty$$
 صفر $\alpha = \alpha$ صفر $\alpha = \alpha$ صفر $\alpha = \alpha$ صفر $\alpha = \alpha$

فإنه يمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة باستخدام المعادلة (٢٠ - ١ - ١) كما يلي:

$$\frac{a}{a} - a \frac{1}{2\alpha} = (\omega_0 + \ldots + \gamma_0 + \gamma_0 + \alpha) \perp$$

$$\frac{1}{\alpha} - a \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$$

وحيث أنه بمكن تجزئة دالة الإمكان إلى جزئين:

يعتمساد عسبل المعلمسة α

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$
 الأول: $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$ والمقدّر س

الثاني: لم (س،، س،، د.،، صن) = ۱ لا يعتصد على المعلمة، وباستخدام نظرية التجزئة (نيان Neyman) فإن س مقدّر كاف للمعلمة α.

مثال ٣:

إذا كمانت س،، س،، س، مس، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة

مأخوذة من التوزيع المنتظم:
$$\frac{1}{\theta_{\gamma}-\theta_{\gamma}}=\frac{0}{\theta_{\gamma}-\theta_{\gamma}}$$
 ح $\theta_{\gamma}>0$ ح $\theta_{\gamma}>0$

أثبت أن القيمة الصغرى $m_{(1)}$ والقيمة الكبرى $m_{(0)}$ معا مقدرين كافيين للمعلمتين $m_{(1)}$ ، $m_{(2)}$

دالة الكثافة المشتركة هي:

$$\dot{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta-1}}\right) = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\theta-1}}$$

وحيث أنه بمكن تجزئة هذه الدالة إلى جزئين:

الأول:
$$L_{r}(m_{x(r)}, m_{y(r)}; \theta_{r}, \theta_{y}) = \left(\frac{1}{\theta_{y} - \theta_{y}}\right)^{c}$$
 يعتمد عمل الملمنين θ_{r}, θ_{y} والمقدرين $m_{x(r)}, m_{y(r)}$

وباستخدام نظرية التجزئة (نيهان Neyman) فإن س100، س_{لان)} مقدران كافيان للمعلمتين 10، 00.

(٢ - ١ - ٢) طرق التقدير بنقطة

نستعرض باختصار طرق التقدير التالية:

Moments Method ۱ ـ طريقة العزوم

Maximum Likelihood Method ٢ ـ طريقة الأمكان الأكب

Least Squares Method على المعات الصغرى ٢ ـ طريقة المربعات الصغرى

(١ - ٢ - ١ - ٦) طريقة العزوم

وهي أقدم طرق التقدير وكان أول من أشار إليها كارل بيرسون. وحيث أن عزوم المجتمعات دوال بمعالم هذه المجتمعات فإننا نحصل عمل تقديرات لهذه المعالم بمساواة العزوم المتناظرة في المدرجة في كمل من المجتمع والعينة. فإذا رمزنا للعزم الواوي حول الصفر للمجتمع بالرمز عمرً فان:

$$\mu = \mu'_{i}$$
 $\mu = \gamma_{i}$ $\mu = \gamma_{i}$

وبحل المعادلات (۲۲ – ۲ ـ ۲) فإننا نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$

مثال ١: إذا كان المتغير س يتبع توزيع بواسون بدالة كثافة إحتمال

$$\frac{\theta}{(1)} = (1 + 1)^{-\theta} = (1 + 1)^{-\theta}$$

$$\frac{\theta}{(1)} = \frac{\theta}{(1 + 1)^{-\theta}} = (1 + 1)^{-\theta}$$

$$\frac{\theta}{(1 + 1)^{-\theta}} = \frac{\theta}{(1 + 1)^{-\theta}} = (1 + 1)^{-\theta}$$

وإذا كــانت س.، س.، س.. س. عينة عشــواثية من المشــاهــدات المستقلة مأخوذة من هذا المجتمع فإن

مثال ٢: إذا كان المتغير س يتبع التوزيع المتنطم بدالة كثافة احتمال

$$heta > -\infty$$
 م صفر $heta = \frac{1}{\theta} = (0)$ مسفر $heta = -\infty$ فيها عدا ذلك $heta = -\infty$ من $heta = -\infty$ فيان $heta = -\infty$ منان $heta = -$

وإذا كمانت س،، س،، س، مس، عينة عشىوائية من المشاهمـدات المستقلة مأخوذة من هذا المجتمع فإن

وإذا عوضنا في المعادلة (٢٣ ـ ٢ ـ ٦) فإن
$$\frac{\theta}{\tau}$$
 = $\frac{\theta}{\tau}$ أي أن مقدّر المزوم $\frac{\theta}{\theta}$ = $\frac{\tau}{\psi}$ $\frac{\tau}{\psi}$ = τ س

(٢ - ٢ - ١ - ٦) طريقة الإمكان الأكبر

إذا كانت س، س، س، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة مين مجتمع له دالة كشافة إحتيال ح(m, 0) حيث $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots, \theta_6)$ فإنسا نختيار د، (m_1, m_2, \dots, m_6) د، (m_1, m_2, \dots, m_6) مين مين مين مين مين كمقدرات د، (m_1, m_2, \dots, m_6) كمقدرات ألما المعالم بحيث تكون قيمة دالة الإمكان المعالمة بالمعادلة (7.1 - 1. - 7) نهاية عظمى. وإذا توفرت شروط معينة Regularity Conditions فإن مقدرات الإمكان الأكبر عبارة عن حلول المعادلات التفاضلية والتي نتوصل إليها بمساواة المعاملات التفاضلية الموغاريتم دالة الإمكان بالنسبة للمعالم بالصفر:

$$\frac{6 \text{ ti } L\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)}{6 \text{ ti } L\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)} = \text{ out}$$

$$\frac{6 \text{ ti } L\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)}{6 \text{ ti } C} = \text{ out}$$

$$(27 - 7 - 7)$$

6 لن لـ (<u>س ؛ 0)</u> = صفر ، 6 و صفر

وفي حالة عدم توفر هذه الشروط، فإننا نستخدم المنطق Commonsense بدلًا من حساب التفاضل في إيجاد مقدرات الإمكان الأكبر. والأمثلة التاليـة توضـح كيفية ايجاد مقدرات الإمكان الأكبر بالطرق المختلفة.

مثال ١:

إذا كنانت س، 6 س، 6 س. 6 سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة حجمها ن مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة الاحتيال

أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة θ.

الحل

دالة الإمكان هي $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ س $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ س $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ د $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ س $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ $= \theta^{-7c}$ • س $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$ هم $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{c}$

لوغاريتم دالة الإمكان هو

لن لـ
$$(\theta)$$
 ؛ سي = - ۲ ن لن θ + لن $\int_{t=1}^{u}$ سي - $\frac{1}{\theta}$ عن سي

وبمفاضلة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى heta ومساواة المعامل التفاضلي بالصفر فإن:

= صفر

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى 🗗 فإن

مثال ۲:

إذا كان المتغير س يتبع توزيع بواسون بدالة كتافة احتمال

$$\cdots = (m = c) = a^{-\theta} \frac{\theta^{-1}}{c!} \qquad c = (161616)$$

وأخذنا عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة س. 6 س. 6 6 س. على هـذ.ا المتغير أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة 0 باستخدام هذه العينة.

141

دالة الإمكان هي:

لوغاريتم دالة الإمكان هو:

ان لـ (
$$\theta$$
 ؛ سِ)= - ن θ + بحن سر لن θ - لن $\frac{\theta}{100}$ سر!

وبمفاضلة لـوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى 6 ومساواة المعامل التفاضلي بالصفر نجد أن

$$\frac{-\text{li} L(\theta + \underline{u})}{c \theta} = -\text{i} + \frac{\frac{3c^2}{c^{2}} u_{0c}}{\theta} + \text{od}_{c} = \text{od}_{c}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى 🕏 فإن

مثال ۳:

إذا كـان المتغير س يتبع توزيع معتاد بتىوقع 4 وتبـاين ٣٥، وأخذنـا عينة من المشـاهدات المستقلة س. ٤ س. ٤ س. ٤ س. ع س. على هـذا المتغير، أوجـد مقدّري، الإمكان الأكبر للمعلمتين 4 ت ٥ لا باستخدام مشاهدات هذه العينة.

الحل

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المعتاد هي:

$$\infty > \mu > \infty$$
 -

$$(\mu_{-}, \alpha_{-}, \alpha_{-}, \alpha_{-}) = (\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{-}}}) = (\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{-}}}) = (\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{-}}})$$

لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$\text{ti} \ \vdash \frac{1}{\sqrt{\sigma} \cdot \sigma} \frac{1}{\sqrt{\sigma} \cdot \sigma} = \text{ti} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sigma}}} \right)^{0} - \frac{1}{\sqrt{\sigma} \cdot \sigma} \frac{2\sigma}{\sqrt{\sigma}} \left(\cos(\mu - \mu) \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

وبمفاضلة دالة الإمكان جزئيا بالنسبة إلى ۴۵ 6٪ ومساواة المشتقبات الجزئيـة بالصفـر فإن

$$\frac{6 \text{Li} \, L(\mu) \, \sigma^{7} \, \mu \, \gamma_{0})}{\mu \, 6} = \text{out} \, - \text{out} \, + \frac{7}{7 \, \sigma^{7}} \, \frac{2^{i}}{6^{-1}} \, (m_{c} - \overset{\wedge}{\mu})$$

$$= \text{out}$$

$$= -v(\hat{\mu} - v_{\alpha}) - \frac{v_{\alpha}}{v_{\alpha}} - \frac{v_{\alpha}}{v_{\alpha}} + \frac{v_{\alpha}}{v_{\alpha}} - v_{\alpha} = -v_{\alpha}$$

وبحل هاتين المعادلتين الأتيتين بالنسبة إلى 🚣 ۴ نجد أن

$$\sqrt[3]{\sigma} = \frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

مثال ع:

إذا كمانت س. 6 س. 6 . . . 6 س. عينة عشموائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له توزيع منتظم بدالة كثافة الاحتيال

$$\int (\omega \, \partial \, \theta, \, \partial \, \theta_{v}) = \frac{1}{\theta_{v} - \theta_{v}} \quad \theta_{v} < \omega < \theta_{v}$$

أوجد مقدّري الإمكان الأكبر للمعلمتين 0, 6 0, .

141

دالة الإمكان هي
$$\left(\frac{1}{\theta}, \theta, \theta, \theta, \frac{1}{\theta}\right)$$
ن (θ , θ , θ , θ) د

أن استخدام قواعد التفاضل في هذه الحالة يؤدي إلى نتاثج غير معقولـة وبالتــالي فإننــا نلجأ إلى استخدام المنطق في تقدير معالم التوزيع.

إن هدفنا الأساسي هو أن نجعل دالة الإمكان نهاية عظمى ويمكن تحقيق ذلك نجعل المقدار $\theta_{Y} = \theta_{Y}$ أقل ما يمكن. فإذا رتبنا مشاهدات العينة ترتبياً تصاعدياً فإننا نحصل على سررى 6 سر(y) 6 سر(y) 6 سر(y) 6 وحيث أن (y) 4 يمكن أن تكون أصغر من أكبر قيمة فإن أقبل قيمة ممكنة أكبر من أصغر قيمة و (y) 4 يمكن أن تكون أصغر من أكبر قيمة فإن أقبل قيمة ممكنة للمقدار (y) 8 سر(y) 9 سر(y) وبالتالي فإن مقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين (y) 6 هما:

مثال ه :

إذا كانت س، 6 س، 6 س. 6 س، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة الاحتيال

$$1 > (س ؛ \theta)$$
 = $(\theta + 1)$ س صفر $= (\omega + 1)$

= صفر فيا عدا ذلك

أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة θ .

الحل

دالة الامكان هي

لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$+ \ldots + \theta$$
 لن س $_{0}$ + θ لن س $_{0}$ + θ لن س $_{0}$ + θ لن س $_{0}$

وبمفاضلة دالة الإمكان بالنسبة إلى heta ومساواة المشتقة التفاضلية بالصفر فإن

$$\frac{c\,\text{li}\,L\left(\theta\right)\,q_{0}}{c\,\theta} = \frac{\dot{0}}{\theta+1} + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1}}\,\text{li}\,q_{0} = \alpha\dot{a}_{0}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى 🕏 فإن

$$1 - \frac{\ddot{\theta}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} \frac{\ddot{\theta}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}} = \hat{\theta}$$

(٣-٢-٢-٣) طريقة المربعات الصغرى واستخدامها في تقدير معالم النهاذج الإحصائية الحطية

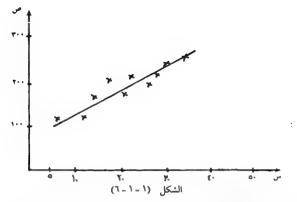
على الرغم من وجود عدد كبير من الطرق للتعبير عن متوسط المتغير التابع كدالة في متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة فإننا نركز اهتهامنا على النهاذج الخطية Linear Statistical Models

ومهها كانت النهاذج التي نستخدمها في التعبير عن العــلاقة بين المتغير التابع والمتخــير أو المتغرات المستقلة فإنها تقسم إلى مجموعتين أساسيتين:

نماذج تقريرية أو حتمية Deterministic Models ونماذج احتمالينة Probabilistic غماذج تقريرية أو حتمية Models

فإذا عبرنا عن العلاقة بين س، ص، بالنموذج الخطي البسيط ص = أ س + ب، حيث أ، ب معالم غير معلومة، فإن هذا النموذج Deterministic لأنه لا يترك مجالاً للخطأ في التنبؤ بقيمة ص كدالة في المتغير س، وفي هذه الحالة فيإن قيمة ص عندما س = ٢٠ مثلاً تكون دائماً أ × ٢٠ + ب.

أمـــا إذا حـــصـــلنــا عـــلى أزواج الــقــيـــم المـــتــنـــاظــرة (س. 6 ص.) 6 (س. 7 ص.) 6 (س. 7 ص.) 6 (س. 7 ص.) 6 (س. 7 ص.) 6 مين بــالشكل (١-١-٦)



فإننا نجد أن العلاقة بين س، ص لا يمكن وصفها باستخدام النموذج التقريري Deterministic لأن قيمة ص تتغير بطريقة عشوائية عندما س = ٢٠ وبالتالي فبإن التنبؤ بقيمة ص عندما س = ٢٠ يكون معرضاً لبعض الخطأ. وفي هذه الحالة فبإننا نعبر عن العلاقة بين س، ص بالنموذج الإحتمالي Probabilistic Model

أو بطريقة أخرى

ت(ص) = أس + ب

حيث خ عبارة عن خطأ عشوائي توقعه صفر وتبـاينه ٢٥ (كميـة محدودة) ولـه توزيـع احتهالي معروف أو غير معروف، أ. ب معالم غير معلومة.

النهاذج الإنحدارية الخطية Linear Regression Models

بما أننا نركز اهتهامنا على النهاذج الإحصائية الخطية فإننا نوضح فيها يلي المقصود بهذه النهاذج، فإذا كان ص هو المتغير التابع و س متغير مستقل فإننا نعبر عن العلاقمة بين س، ص باستخدام النموذج

ويـلاحظ في الصيغة الشانية أن ت (ص)دالـة خطيـة في المتغير المستقـل س (عند قيم عمدة لـ أ ، ب) وكذلك دالة خطية في المعالم أ، ب، أما في النموذج

ت(ص) = أس^۲ + ب

فإن ت (ص) دالة خطية في المعالم أ ، ب وليست دالة خطية في س. والمقصود بالنهاذج الإحصائية الخطية النهاذج التي يكون فيها ت(ص) دالة خطية في المعالم غير المعلومة أ ، ب، وبالتالي فيإن ص = أ لن س + ب + خ نموذج خطي لان لن س كمية ثمابتة معلومة.

Simple Linear Regression Model General Linear Regression Model Multiple Linear Regression Model نموذج الانحدار الخطي البسيط، نموذج الانحدار الخطي العام أو نموذج الانحدار الخطي المتعدد

إذا كان النموذج يعبر عن ت(ص) كدالة خطية في المعلمتين أ ، ب فإنه يسمى نموذج الإنحدار البسيط كها هو مبينٌ في المعادلة التالية:

ص = أس + ب + خ (٢٤ - ٢ - ٦)

حيث أ ، ب معالم غير معلومة ، خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه ٣٥ (كمية محدودة) وتوزيعه معلوم أو غير معلوم كها أن تغا (خ ٫ 6 خ ٫) = صفر إذا كانت ر ≠ و .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد (س، 6 س، 6 س، 6 . . . 6 س،) وعـبّرنا عن العـلاقة بـين المتغير التـابع ص والمتغيرات المستقلة س، 6 س، 6 س، س. م. ه س. على النحو التالي

$$\phi = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

فإن هذا النموذج يسمى غوذج الإنحدار الخطي العام أو غموذج الإنحدار الخطي المعام أو غموذج الإنحدار الخطي المعدد حيث أر λ أو λ أو معالم غير معلومة ، خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينة λ (كمية محدودة) وله توزيع معلوم أو غير معلوم، كيا أن تفا (خ λ خ λ خ و .

تقدير معالم نموذج الإنحدار الحطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى:

إذا كان للدينا أزواج القيم (س، 6 ص،) 6 (س، 6 ص،) 6 . . . 6 (س، 6 ص،) 6 . . . 6 (س، 6 ص،) 6 . . . 6 (س، 6 ص،) ورسمنا الشكل الانتشاري وتبيّن لنا من هذا الشكل أن العلاقة بين

المتغيرين س 4 ص هي علاقة خطية بسيطة (المعادلة (٢٤ - ٢ - ٦))، فإننا نـرسم خطأ يمر بمعظم النقط في الشكل الإنتشاري ويتوسط الباقي أحسن توسط يسمى الخط المـوفق أو الخط الممهد Fitted Line. والمقصود بالخط الممهد أو الموفق هـو أن يكون مجموع مربعات انحرافات الإحداثيات الصادية لنقط الإنتشار عن الخط الممهد (مجموع مربعات الأخطاء) أقل ما يمكن.

فإذا رمزنا للإنحراف الإحداثي الصادي المشاهد (ص) عن الإحداثي الصادي الممهد (صُ) بالرمز ح فإن مقياس جودة مطابقة الحتل الممهد للبيانات المعلاة هو

$$d = (\omega_{i} - \mathring{\omega_{i}})^{T} + (\omega_{iT} - \mathring{\omega_{iT}})^{T} + \dots + (\omega_{iC} - \mathring{\omega_{iC}})^{T}$$

$$= -^{T}_{i} + -^{T}_{i} + \dots -^{T}_{iC}$$

$$= -^{T}_{i} + -^{T}_{i} + \dots -^{T}_{iC}$$

فإذا كان هذا المقدار صغيراً فإن المطابقة جيدة وإذا كان كبيراً فإن المطابقة سيئة.

وطريقة المربعات الصغرى تُعنى بتحديد الخط المستقيم (من بين العدد اللانهائي من الحلوط المستقيمة) الذي يجعل المقدار ط أقل مـا يمكن، وتعيين خط مستقيم يعني تحديد ثوابت المعادلة التي تمثله، أي تحديد قيمة واحدة لميل الحط المستقيم أ في المدى - ∞ < أ < + ∞ وتحديد قيمة واحدة للجزء المقطوع من محور الصادات ب في المدى - ∞ < - < - ∞

ويمكن إعادة كتابة (٢٦ ـ ٣ ـ ٦) كها يلي

$$d = \frac{3c}{2c^{-1}} (\omega_{c} - \omega_{c})^{V}$$

$$= \frac{3c}{2c^{-1}} (\omega_{c} - 1)^{V}$$

$$= -1 \omega_{c} - 1 \omega_{c} - 1 \omega_{c}$$

وبمفاضلة (٢٧ ـ ٣ ـ ٦) جزئياً بالنسبة إلى أ ، ب على التوالي ومساواة المشتقات الجزئية بالصفر فإن

$$\frac{6d}{16} = -7 \frac{2c}{1-1} m_{x} (m_{x} - 1) m_{x} - \mu) = max$$

$$\frac{6}{16} = -7 \frac{2c}{1-1} (m_{x} - 1) m_{x} - \mu) = max$$

أي أن

$$\frac{2^{-1}}{2^{-1}} = \frac{2^{-1}}{2^{-1}} = \frac{2^$$

عِنْ ــ (ص ِ - أس ِ - ب) = صفر ر-۱

Two Normal Equations

وتسمى (٢٨ ـ ٢ ـ ٦) المعادلتان الطبيعيتان

و ٢ ك ب مقدرا المربعات الصغرى للمعلمتين أ ، ب.

وبحل هاتين المعادلتين فإن:

حيث س الوسط الحسابي للمتغير س 6 ص الوسط الحسابي للمتغير ص.

خواص مقدرات المربعات الصغري:

تنص نظرية جاوس ماركوف على ما يلي:

١ _ ٢ ك ٢ مقدران غير متحيزين للمعلمتين أ، ب، أي أن:

٢ ـ المقدان أ كا ب لهما تباين أقل من تباين أي مقدرين آخرين غير متحيزين
 وخطين في المشاهدات ص٠٥ ٥ ص٠٠ ٥ ٠٠٠٠ ص٥٠

خواص الخط المهد:

سوف نذكر هذه الحواص ونترك بـرهنتها كتمـرين للقاريء، كــها نرمـز للخطأ

المقدّر بالرمز كُم وهو عبارة عن ص. - صُر حيث ص. القيمة الرائية المشاهـدة للمتغير النابع، صُر القيمة الرائية الإتجاهية لهذا المتغير:

١ ـ مجموع الأخطاء المقدرة يساوي صفر، أي أن

٢ - مجموع مربعات األخطاء المقدرة نهاية صغرى، أي أن

٣ - مجموع القيم المشاهدة يساوي مجموع القيم الإتجاهية، أي أن

٦- الخط الممهد بمر دائماً بالنقطة (س 6 ص)، حيث س الوسط الحسابي للمتغير
 س 6 ص الوسط الحسابي للمتغير ص

توزيعا المعاينة للمقدرين 🕯 ، بُ :

بالرجوع إلى المعادلة (٢٩ ـ ٢ ـ ٦) فإنه يمكن كتابة البسط على النحو التالي:

وبالتالي فإن

$$\uparrow = \frac{2-(m_x - m_y)}{2} \frac{m_x}{m_y} = \frac{2}{2m_y} \frac{m_x}{m_x} = \frac{2}{2m_y} \frac{m_x}{m_y} = \frac{2}{2$$

ولاكي نتمكن من امجاد القيمة المتوقعة والنيباين وبالتالي توزيع المعاينة للمقدّر إنها ندرس فيها يلي خواص لئر المعطاة قيمتها في المعادلة (٣٣ ـ ٣ ـ ٦).

(7 - 7 - 77)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1$$

وباستخدام المعادلة (٣١ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{1$$

برهنة هذه الخصائص الملاث فإنه يمكن إيجاد القيمة المتنوقعة والتباين وتوزيع يه للمقدر أ كما يلي:

عددام الخاصيتان الأولى والثانية للمقدار كر فإن

= ۳α <u>عن (۲</u> راستخدام الخاصية الثالثة للمقدار ك, فإن

وبالتالي إذا كانت V معلومة فإن أثمتهم التوزيع الطبيعي بتوقع أ وتباين $\frac{\nabla}{2}$ (س. $-\frac{\nabla}{2}$ أما إذا كانت V غير معلومة فإننا نقدرها كما سيأتي فيها بعد بمسوط تجموع مربعات الاخطاء ويكون توزيم المعاينة هو توزيم $^{\circ}$ عبر بحات حرية ن $^{\circ}$.

ثانياً توزيع المعاينة للمقدّر بُ

لايجاد القيمة المتوقعة والتباين وبالتـالي توزيـع المعاينـة للمقدّر ب، فـإننا نعيـد كتابة المعادلة (٣٠ ـ ٢ ـ ٢) على النحو التالى:

والقيمة المتوقعة والتباين للمقدّر ب هما:

$$\begin{array}{rcl}
\dot{\Box} & (\dot{\uparrow}) & = & ($$

+ TT3-

$$(\overset{\wedge}{\varphi})^{-1} = \overset{\wedge}{\varphi}^{-1} = \overset{$$

وبالتالي إذا كانت $abla^7$ معلومة فإن $abla^7$ تتبع التبوزيع الطبيعي بتوقع ب وتباين $abla^7$ $abla^7$). أما إذا كانت $abla^7$ غير معلومة فإننا نقدرها كيا $abla^7$ أما إذا كانت $abla^7$ غير معلومة فإننا نقدرها كيا سيأتي فيما بعد ممتوسط بحموع مربعات الأخطاء، ويكون توزيع المعاينة هو توزيع $abla^7$ بدرجات حرية ن $abla^7$.

توزيع المعاينة للقيمة الإتجاهية للمتغير التبايع عند مستوى معين للمتغير المستقبل الم

من المعلوم أن القيمة الإنجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل مسرونومز لها بالزمز صمر تحسب من المعادلة التالية :

ولايجاد القيمة المتوقعة والتباين وبالتالي توزيع المعاينة للمقدر ص. فإننا نكتب المعادلة (٣٨ ـ ٢ ـ ٦) بالتمويض عن قيمة ثم من المعادلة (٣٠ ـ ٢ ـ ٦)،

على النحو التالي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{$$

من المعادلة. (٣٨ - ٢ - ٦) نجد أن

$$(1-T-E^*)$$

$$(1-T-E^*)$$

$$(1-T-E^*)$$

$$(1-T-E^*)$$

ومن المعادلة (٢٩ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

وتوزيع المعاينة للمقدّر $صيم، إذا كانت <math>\nabla$ معلومة، هو التوزيع الطبيعي بتوقيع $\mathcal{U}(m_a)$ وتباين ∇ $\left(\frac{1}{t} + \frac{(m_c - m)^2}{\sqrt{1-m_c}}\right)$. أما إذا كانت ∇ غير معلومة فإننا نقدرها بمتوسط مجموع مربعات الأخطاء ويكون توزيع المعاينة في هـذه

الحالـة هو توزيع ت بدرجات-رية ن - ٢

تقدير تباين الخطأ

تباين الخطأ (δ°) يكون في المعتاد غير معروف وفي هذه الحالة فإنه يجب تقديسره لأغراض الاستدلال الإحصائي المتعلق بنموذج الإنحدار.

ولوضع أساس لتقدير تباين نموذج الإنحدار، فإننا نوضّح تقدير تباين مجتمع منفرد بتباين عينة عشوائية حجمها ن مأخوذة من هذا المجتمع. وتباين العينة عبارة عن مجموع مربعات إنحرافات مشاهداتها عن وسطها الحسابي مقسوماً على درجات الحرية، أي أن

$$\frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{$$

حيث أننا نفقد درجة حرية واحدة باستخدام التقدير ص

أما في حالة نموذج الإنحدار فإن المشاهدات صرر تـأتي من توزيعـــات احتياليــة مختلفة بمنوسطات غير متساوية، لذا يجب حساب إنحــراف المشاهـــــة صبر عن وسطهـــا المقدّر مرر، وبالتالي فإن

حيث أننا نفقد درجتي حرية باستخدام أ ك م م وتسمى ٢٥٠ متوسط مربعات الأخطاء Error Mean Square ونرمز له بالرمز MSE .

تحليل التباين في نموذج الانحدار الخطى البسيط:

Analysis of Variance for the Simple Regression Model

إن مقدار التفاوت الكلي Total Variation أو تباين المتغير التابع ص يمكن تجزئتــه إلى جزئين على النحو التالى:

$$\frac{2\dot{\psi}}{2} = (\alpha_{0,c} - \overline{\alpha_{0}})^{2} = \frac{2\dot{\psi}}{2} - (\alpha_{0,c} - \overline{\alpha_{0}})^{2} + (\overline{\alpha_{0}} - \overline{\alpha_{0}})^{2} + (\overline$$

(33 - 7 - 7)

$$\frac{2^{i}}{(2\pi)^{2}}(\omega_{i} - \overline{\omega_{i}})^{T} = \frac{4^{i}}{(2\pi)^{2}}(\omega_{i} - \overline{\omega_{i}})^{T} + \frac{4^{i}}{(2\pi)^{2}}(\omega_{i} - \overline{\omega_{i}})^{T}(0.8 - T - T)$$

أي أن

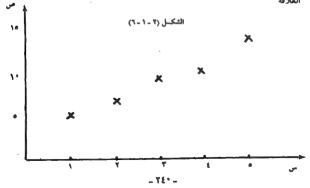
التضاوت الكلي Total Variation ≈ التضاوت غبر المفسر Unexplained Variation أو Error Sum of Squares (SSE) مجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية +التفاوت المفسر Explained Variation أو مجموع المربعات الذي يُعزى للإنحدار -(Re-) gression Sum of Squares (SSR)

تمرين توضيحي ١

إذا كمان المتضيران س، ص يسرتبطان بعسلاقة ما يعتقد بأنها ص = أس + ب + خ، وهي نفس المعادلة المحددة بالنصوذج (٢٤ - ٢ - ٦)، وكان لدينا أزواج القيم التالية:

ص	ص_
4	٣
٥	1
٧	۲
18	٥
1.	٤

فإننا نبدأ برسم الشكـل الانتشاري التـالي (الشكل (٢ ـ ١ ـ ٦)) للتـأكد من شكـل العلاقة



وهذا الشكل يؤكد أن التغيرين س، ص يرتبطان بعلاقة خطية بسيطة، لذلك roint نقوم بإجراء الحسابات التالية لتقدير معالم هذا الحط أ، ب وتباينه ro بنقطة Sampling Distributions واستخدام هذه المقدّرات وتوزيماتها المينّية sampling Distributions فيها بعد في تركيب فترات الثقة لهذه ألمعالم واختبار الفروض المتعلقة بها.

^ (ص - ص)*	^ - ص - ص	من	س"	س ص	ص	می	
مقر	صقو	•	•	**	4	۳	
*,*8	٠,٧	£,A	1		•	1	
*,**	*,1	1,1	ŧ	18	٧	Y	
37,*	*,A	١٣,٢	Ye	*	18		
1,11	1,1-	11,1	13	£*	1.	ŧ	
1,4-	صقر	£0,*		707	80	10	الجموع

وبالتعويض في (٢٩ ـ ٢ ـ ٦) 6 (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$=\frac{ror - \frac{of \times o3}{o}}{co - \frac{of}{o}}$$

$$\frac{10}{0} \text{ Y, 1} = \frac{80}{0} = \frac{1}{0}$$

وإذا صوضنا بقيم س في هذه المعادلة فإننا نحصل على القيم الإنجاهية أو المتوقعة للمتغير ص (ص) والمبينة في العمود الخامس من الجدول السابق، أما تقديرات الإعطاء ومربعاتها فإنها مبينة في العمودين السادس والسابع. وإذا عوضنا مجموع العمود الأخير من هذا الجدول في المعادلة (٣٢ - ٣ - ٧) فإن

•,
$$777 = \frac{1, 9}{7} = \frac{1, 9}{7 - 0} = \frac{1}{7}$$
 MSE

ويمكن حساب التفاوت الكلي والاختلافين المفسر وغير المفسر كما يلي:

(ص - ص)۲	۸ ص - ص	(ص - ص)*	ص - ص	(ص - ص)اً	ص - ص
صقر	۹ – ۹ = مغر	مغو	صغو	متر	۹-۹=متر
17,78	A,3-#7,3	•,•ŧ	٠,٣	11	$\xi - = \xi - a$
13,3	7,7-9=-7,9	*,*1	1,1	ŧ	$Y = \phi = V$
37,78	γ , $\gamma t - P = \gamma$, 3	37.*	* ,A	Ye	3f - F = 0
13,3	$r_*r_t = r_*r$	1,11	1,1=	1	1=4-1-
11.11	صقو	1,4*	مقر	13	المجموع صفر
		+('در'	\ (صد - مو	نسر (عجن	التفاوت غير الما
		(ر - ص) ^۲	۸ (مجن – (صو	التفاوت المفسر

تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي العام:

لقد سبق أن درسنا، في الانحدار الخطي البسيط، الملاقة بين التغير التابع ومتغير واحد مستقل. وإذا زاد عدد المتغيرات المستقلة عن واحد فإننا نكون بصدد النموذج الخطي العام المعطى بالمعادلة (٢٠ - ٢)، أي أننا نستخدم أكثر من متغير واحد مستقل للتنبوء بقيمة المتغير التابع. فإذا فرضنا أن حجم المبيعات من سلمة معينة يعتمد على سعر هذه السلمة وتنبأ البائع، اعتهاداً على ذلك، بحجم مبيعاته من هذه السلمة فقد يجد مثلاً أن ٧٠٪ من النباين في حجم المبيعات يمكن تفسيره بالسعر وفي هذه الحالة فإنه يبحث عن متغير أو متغيرات أخرى لا يرتبط بقوة بالمتغير الأول لكي يتمكن من تفسير جزء أكبر من النباين في حجم المبيعات، أما إذا كان المتغير الجديد مرتبطاً بقوة بسعر السلمة فإن إضافته لا تفسر جزءاً أكبر من النباين ويسمى هذا النوع من الارتباط في الاحصاء أو الاقتصاد القيامي بالارتباط الداخلي . Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبر Collinearity بين المتغيرات المستقلة كما يشار البيعات والمناسبة والمتحد والمتعربة و

وهناك بعض الحالات التي لا يكون فيها النموذج Additive بمعنى أن نسبة من التباين التي يفسرها متغير مستقل بـوجود متغير آخر يعزى الى مايسمى بالتفاعــل المزدوج Interaction والتي يجب أن تؤخذ في الاعتبار أثناء اختيار النموذج المناسب.

$$(7 - Y - \xi 1)$$
 ت (ص) = أ، س، $+$ أو س، $+$ أو س) $+$ (۲ - $+$ (ص) $+$ آبا (ص) = $+$ آبا (ص) $+$ آبا (ص)

وبالتالي إذا كانت خ تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين ^γ فإن ص تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع أ_{ا ص۱} + أ_ا س، + . . . + أ_ر ص, وتباين ^γ .

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \omega_{ij} + \dots & \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \\ \omega_{ij} &= \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \omega_{ij} + \dots & \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \\ &\vdots \\ \omega_{ij} &= \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \omega_{ij} + \dots + \hat{1}_{i} \omega_{ij} + \hat{1}_{j} \end{aligned}$$

ونعبر عن هذه المجموعة من المعادلات الأنية بـاستخدام المصفـوفات لتسهيـل عملية التفاضل وبالتالي تقدير المعالم أر، أو، . . . أر

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

وحيشها يزول الالتبـاس في فهم دليل التجميع فإننـا نكتب هذه المصفوفة عـلى النحو التالى:

وهـنه المصفوفـة مربعـة ترتيبها و \times و، وعددها لا يسـاوي صفـراً، أي أن اس من $| \pm \rangle$ صفر وبالتالي فإنه يمكن حــاب مقلوب هنه المصفوفة Inverse of the من من المحالم والذي نستخدمه في تقدير معالم النموذج الخطي العام كيا سياتي مباشرة.

بعد ذلك يمكن إعادة كتابة (٤٩ ـ ٢ ـ ٦) على النحو التالي:

ص = س أ + خ

كما سبق أن درسنا في تقدير مصالم النموذج الخبطي البسيط فإن المطلوب همو تقدير المعالم أ، كم أ، ك . . . كم أر بحيث يكون مجموع مربصات الاخطاء أقمل ما يمكن (أي أن خ\ + خ\ + . . . + خ\ نهاية صغرى). من المعادلة (٥٥ ـ ٢ ـ ٢) نجد أن:

خ = ص - س _

ومجموع مربعات الأخطاء هو:

خ'خ = خ\' +خ\' + ... +خ'ة

وحيث أن ص من ا = أ س ص لأن كلا منها يساوي علداً Scalar وحيث أن ص أن علامنها يساوي علداً Quantity فإنه يكن كتابة (١٥ - ٢ - ٢) كما يل:

د (أ) = خ ع ص ص ص ح ٢ أ س ص + أ س س أ ص الله عند ع ص ص ص ح ٢ من ص

وبإيجاد المشتقات الجزئية للدالة د (أ) في المعادلة (٥٠ ـ ٢ ـ ٦) بالنسبة إلى المعالم أركى أرك . . . كي أر ومساواة هذه المشتقات الجزئية بالصفر نجد أن:

صقر - ۲ س ص + ۲ س س صفر

أي أن:

 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

ويضرب طرفي المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٦) ضرباً قبليـاً Pre-Multiplication بالمقـدار (م. ' س.) - فإن:

(س' س)^{۱-} س' س أ = (س' س)^{۱-} س' <u>ص</u>

وحيث أن (س′ س) $^{-1}$ س′ س = 1 مصفوفة الوحدة فإن متجه مقدرات المربعات الصغرى للمعالم أ، 6 أ، 6 6 أر هو:

<u> (۳ س) ۱- س ص</u>

- Y10 -

القيمة المتوقعة والتباين لمتجه المقدرات أ :

نا (أ - أ) (أ - أ) (أ - ٢ - ٢ - ٢) نا (أ - أ) نا (أ - ٢ - ٢ - ٢)

وإذا أخذنا القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر هذه المصفوفة فإنه ينتج لدينا مصفوفة جديدة تمثل العناصر التي على قطرها تباينات المقدّرات 0 ,

= ت (((س' س) ٦٠ س' س أ + (س' س) ١٠ س' خ - أ)((س' س) ١٠ س' س أ + (س' س) ٢٠ س' خ - أ)')

= ت (((س س) ا س خ) ((س س) ا س خ))

= ت ((س' س) ١٠٠٠ س ن غ خ ض س (س' س) ١٠٠٠ -

= (س' س) ١٠ (خ خ') س (س' س) =

= ۳۵ (س^ا س) س ٔ س (س ٔ س) ^{۱–}

(ع - أس س) م - (س س) م =

حيث أن تباين أ ، هو العنصر الأول على القطر الرئيسي وتباين أ ، هــو العنصر الثاني على القطر الرئيسي وهكذا .

ويمكن إثبات أن مقدرات المربعات الصغرى لها تبـاين أقل من تبـاين أي مقدّر آخر غير متحيز وخطي في المتغير التابع ص.

توزيمات المايئة للمقدرات أر:

إذا كنان تباين النموذج الخطي العام (σ) معلوماً فإن أر لها توزيع طبيعي بتوقع أر وتباين σ (أر) وهو العنصر رعلى القطر الرئيسي لمصفوفة التباينات المعطاة بالمعادلة (σ - ۲ - د)، أما إذا كنان التباين σ غير معلوم فإننا نقدره بـ MSE وبالتالي فإن أر تتبع تنوزيع ت بندرجات حرية (ن - و). وسنوف نستخدم هذه التوزيعات العينية في تكوين فترات الثقة لمعالم النموذج الخطي العام أر وفي اختبارات الفروض المتعلقة بهذه المعالم. أما إذا أرنا تكوين فترات ثقة مشتركة لهذه المعالم فإننا نستخدم طريقة بونفيرون كما سيأتي فيها بعد.

نوزيع المعاينة للقيمة الاتجاهية للمتغير التابع عند مستوى عدّد للمتغيرات المستقلة:

القيمة الاتجاهية للمتغير التنابع عنـد مستـوى محـدّد للمتغيرات المستقلة سيـد ^ نرمز لها بالرمز ص. وتعطى كها يلي:

والقيمة المتوقعة والتباين لهذا المقدر هما:

فإذا كانت ∇ معلومة فإن \bigcap_{n} تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع كها هو مبيين في ∇ - ٢ - ٢) وتباين كها هو مبين في ∇ - ٢ - ٢). أما إذا كانت ∇ غير معلومة فهإن ∇ - ٢ - ٢) وتباين كها هو مبين في ∇ - و)

تحليل التباين في النموذج الحطى العام:

Analysis of Variance in the General Linear Model:

يكن تجزئة التفاوت الكلي في المتغير التابع ص إلى اختلاف مفسر Regression Sumof Squares أو مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار (SSR) واختلاف غير مفسر Unexplained Variation أو مجموع المربعات الذي يعزى للموامل العشوائية (Error Sumof Squares (SSE كما يلي:

حيث الحد الأول في الطرف الأيسر من (٦٦ ـ ٣ ـ ٦) يسمى الاختـلاف المفسر والحد الثاني يسمى الاختلاف غمر المفسر .

تمرين توضيحي ٢:

إذا كان لدينا النموذج الخطى العام التالى:

بنفس الفرضيات المحددة في النموذج (٢٠ ـ ٢ ـ ٦)، وأعطيت لنا بيانات على

: هذا النموذج حصلنا منها على النتائج التالية:

$$\begin{bmatrix} \Lambda^* \\ 1\Upsilon^* \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{w' \underline{w}} = \begin{bmatrix} 1 & \Lambda & 1 \\ 0 & W' \underline{w} \end{bmatrix} = \underbrace{w' \underline{w}} = \underbrace{w' \underline{w'}} = \underbrace{w' \underline{w'$$

فإنه باستخدام المعادلة (٥٤ - ٢ - ٦):

$$\begin{bmatrix} 17 - \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \\ 17 \cdot \\ \xi \cdot \\ \vdots \\ \xi \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot , \cdot \circ - & \cdot , \gamma \circ - & \cdot , \gamma \cdot \\ - \circ , \circ \cdot & - & \circ , \gamma \circ - \\ \vdots \\ \cdot , \gamma \cdot & - & - & \circ , \gamma \circ - \end{bmatrix} = \frac{\triangle}{2}$$

أي أن:

وإذا فرضنا أن:

ويمكن ايجاد مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار (الاختلاف المفسر) ومجموع المربعات المذي يعزى للعواسل العشوائية (الاختلاف غير المفسر) بـاستخدام (11 - 2 - 7) كما يل.:

الاختلاف غم المسرّ = ١٥٤٠ - ٢٨٢٠ = ٢٨١

أما الاختلاف أو التفاوت الكلي باستخدام نفس المعادلة (٦١ ـ ٢ ـ ٦) فهو:

$$30F - FI \left(\frac{\Lambda}{FI} \right)^7 = 30F - \cdots 3 = 31F$$

وهو يساوي بدوره مجموع الإختلافين المفسّر وغير المفسّر.

Curvilinear Regression

الاتحدار غير الخطي

بعد أن انتهينا من تحليل النموذج الخطي العام فيأنه من المفيد أن ندرس بعض نماذج الإنحدار غير الخطي وأن نوضح كيفية تحويلهما إلى نماذج خعطية وبالتالي تقدير ثوابتها بطريقة المربعات الصغرى.

Polynomial Regression

أولاً: الإنحدار غير الخطى المسمى

يمكن أن يحتوي هذا النوع من النهاذج على متغير واحمد مستقل أو أكمثر وسوف نركز اهتهامنا على النهاذج التي تحتوي على متغير واحد فقط. فمثلًا النموذج

$$\dot{c} + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3$$

يسمى نموذج بمتغير واحد مستقل من الدرجة الثانية، وتقدر معالم (ثــوابـت) هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى على النحو التالي:

مجموع مربعات الأخطاء هو

وعِفَاصْلَة ط جزئياً بالنسبة إلى أ. ٤ أره أر فإن

$$\frac{6d}{16} = - \gamma \frac{3c}{1c^{-1}} (\omega_{x} - 1, -1_{1}\omega_{x} - 1_{y} \omega_{y}^{y})$$

$$\frac{6d}{16} = - \gamma \frac{3c}{1c^{-1}} \omega_{x} (\omega_{x} - 1, -1_{1}\omega_{x} - 1_{y}\omega_{y}^{y})$$

$$\frac{6d}{16} = - \gamma \frac{3c}{1c^{-1}} \omega_{y}^{y} (\omega_{x} - 1, -1_{1}\omega_{x} - 1_{y}\omega_{y}^{y})$$

وبمساواة $\frac{6d}{6!}$ ، $\frac{6d}{0!}$ ، $\frac{6d}{0!}$ بالصفر فإننا نحصل على مجموعة المعادلات التالية

ويمكن استخدام المصفوفات في التعبير عن همذه المعادلات بـاستخدام المعـادلة

أما إذا كان لدينا نموذج بمتغير واحد مستقل من الدرجة الثالثة:

- 101-

والمصفوفة س'س مربعة ومحدها لا يساوي صفراً وسالتالي فيإنه يمكن حساب مقلوب لهذه المصفوفة (س'س) وإذا ضربنا المصادلة س'<u>س مس " ضرباً ضرباً ...</u> فرباً Pre-Multiolication

بـ (س'س) ً ' نجد أن ۵

<u>^ = (س'س) ۱- س'ص</u>

وهي نفس النتيجة المبينة بالمعادلة (٥٤ ـ ٢ ـ ٦)

غرين توضيحي

إذا كان لدينا البيانات التالية

س	من
0.4.1	صفر
3,473	صفر
97,470	
٧,٧٧٥	1
701,7	*
10V, .	4
٧,٥٥,٣	٤
VOA,4	
YAY, l	٥
V4Y,1	٥
3,/34	7
AT1,A	٦
A0 & , V	٧
AV1, £	٧

9904,4

والمطلوب هو توفيق النموذج ص = أ. + أرس + أرس + خ بطريقة المربعات الصغرى (يستدل على ذلك عندما يسرسم شكل الإنتشار للنقط (سرة صر) ويظهر من انتشارها أن العلاقة بين المتغيرين عكن تمثيلها بعلاقة من الدرجة الثانية أو الثالثة

او أعلى من ذلك أو علاقة لوغاريتمية أو غير ذلك).

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وقد وجد أن

وبالتالي فإن التفاوت غير المفسّر (التفاوت الذي يعزي للعوامل العشوائية SSE) هو:

$$- \text{ AV1, £)} + \ldots + {}^{\mathsf{T}}(\circ {}^{\mathsf{T}}, {}^{\mathsf{T}} \mathsf{E} \mathsf{T} - \circ {}^{\mathsf{A}}, \mathsf{I}) = {}^{\mathsf{T}}(\overset{\wedge}{\mathsf{O}} - \overset{\wedge}{\mathsf{O}})$$

703, / /A) = V, / /V

هــو
$$\bigwedge_{\frac{1}{2^{n-1}}}^{\Lambda} (O_{n}^{\Lambda} - O_{n}^{\Lambda})^{T} = (1, 207)^{T} + \dots + (1, 207)^{T} + \dots + (1, 207)^{T}$$

والتفاوت الكلي SSTO هو

- ۸۷۱,٤) +
$$^{\mathsf{T}}(\mathsf{V1}^{\circ},\mathsf{997}^{\mathsf{T}}-\mathfrak{o}^{\circ}\mathsf{A},\mathsf{1})=\overline{(\mathfrak{o}_{\mathsf{A}}^{\mathsf{T}}-\mathfrak{o}_{\mathsf{A}}^{\mathsf{T}})}$$

YYOVET. 0 =

وبالتالي فإنه يمكن تكوين جدول أساسي التحليل التباين على النحو التالي:

ن	متوسط مجموع المربعات	درجات الحرية	عجموع المربعات	مصدر التفاوت
1779, • 8	117010,4	٣	YY0.T1,A	الاتحدار
	78,7	11	٧١١,٧	الخطأ
		١٣	770787,0	الكلبي

ومعامل التحديد را هــو

إن كل مستوى للمتغير ص يقابله مشاهدتان للمتغير التبابع ص، ولذا فإنه يمكن اختبار مدى تمثيل النموذج للعلاقة بين س6ص Aptness of the Model

على النحو التالى:

0⁴ : ت(ص) = أ. + أرس - أرس

 Y رس + أرس + أرس + أرس Y

Pure Error Sum of Squares SSPE لتفاوت الذي يعزي للعوامل العشوائية فقط

حيث ص, عبارة عن متوسط المشـاهدتـين للمتغير ص عن المستـوى ر للمتغير

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, 70 = \frac{\xi \Lambda, \xi + 0.4, 1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن

+ +
$$^{\mathsf{T}}(\circ \cdot \mathsf{T}, \mathsf{T}\circ - \xi \mathsf{T}\wedge, \xi) + {}^{\mathsf{T}}(\circ \cdot \mathsf{T}, \mathsf{T}\circ - \circ \cdot \wedge, 1) = \mathsf{SSPE}$$

 ${}^{\mathsf{T}}(\mathsf{A}\mathsf{T}\mathsf{T}, \circ - \mathsf{A}\mathsf{V}1, \xi) + {}^{\mathsf{T}}(\mathsf{A}\mathsf{T}\mathsf{T}\circ - \mathsf{A}\circ \xi, \mathsf{V})$

ومقدار التفاوت الذي يعزي لعدم مطابقة النموذج للبيانات المعطاة Lack of

Fit Sum of Squares (SSLF) عو کیا یل:

وجدول تحليل التباين في هذه الحالة هو

مصدر	مجموع	درجات	متوسط مجموع	ف
التفاوت	المربعات	الحرية	المربعات	
الانحدار	770.71,A	Υ'	117010,9	
عدم المطابقة	£.V,1	£	1.1,4	7,78
العشوائية فقط	7.3.7	٧	27,0	
الكلي	*******	14		

ثانياً: العلاقة المندسية Geometric Relationship

نوفق هذا النموذج بتحويله إلى تحوذج خطي بسيط بـواسطة اللوغـاريتيات عـلى النحو التالي ونستخدم بعد ذلك طريقة المربعات الصغرى لتقدير الثوابت أ 6 ب:

أي أننا نحسب لوغاريتات قيم المتغيرين المستقل س والتابع ص وإذا وضعنا لو س = س م لوص = ص م

لو أ = أ' فإن النموذج يؤول إلى

ص' = أ' + ب س'

منسال:

الجدول التالي يبين الدخل السنوي (س) بالدينار لـ 18 أسرة ومقدار الإنفاق (ص) بالدينار، على سلعة معينة. والمطلوب هو تنوفيق النموذج ص = أس^ب لهذه البيانات

ص' = لو ص	س' = لو س	مقدار الانفاق (ص) على	دخل الأمرة السنوي
		سلعة معينة بالدينار	(س) بالدينار
.,٣٩٧٩	۲,۸۳۷٦	۲,0	1AA
٠,٢٧٨٨	7,4200	1,4	AAY
*,0140	4,.008	٣,٣	1177
3775,	4,1104	٧,٩	1797
٠,٦١٢٨	4,4174	٤,١	1789
٠,٩١٣٨	7377,7	A, Y	1441
٠,٨٨٦٥	T, 77	٧,٧	Y1 Y A
۰,۸٦٣٣	۳,۳۷۸۰	٧,٣	YYYA
1954.	T, 270A	٧,٤	AYYY
1,17:3	T,0.A8	14,4	3777
۸۲۸۷۸	4,0777	19,8	7777
1,8777	4,7844	77,0	1270
1,77.7	T, 7710	0,70	09.4
1,4770	1,.11.	7, 0A	11.17
١٣,١٢٨٥	1797		المجموع

```
A. TYOP
                                                                                                                                                                                                 .AYIY
                                                                                                 9.7700
                                                                                                                                                                                                 1.0AEY
                                                                                                 4.4.50
                                                                                                                                                                                                 1.88.0
                                                                                           1. . 40. 2
                                                                                                                                                                                              1.4710
                                                                                           1., ٧٢٢.
                                                                                                                                                                                              Y. 44 TT
                                                                                           Y.4071
                                                                                           11.21.4
                                                                                                                                                                                              Y.417Y
                                                                                           11.A.EV
                                                                                                                                                                                             3747.7
                                                                                          14.T.A4
                                                                                                                                                                                              7.9710
                                                                                          17.7971
                                                                                                                                                                                              2. . 7719
                                                                                           17.771.
                                                                                                                                                                                             0.19EA
                                                                                           18, 7787
                                                                                                                                                                                          7. 8477
                                                                                         17,7079
                                                                                                                                                                               ٧,٨١٥٠
                                                                                                                                                                                         $7.709 £
                                         17,17A0 × EV,1747 - E7,704E
                                                                                      = \frac{\gamma\30\cdot,\gamma}{\rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\gamma}} = \rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\gamma\cdot\gamma} = \rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\gamma\cdot\gamma} = \rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\gamma\cdot\gamma} = \rac{\gamma\3\cdot,\gamma}{\gamma\cdot\gamma} = \rac{\gamma\3\cdot\gamma}{\gamma} = \rac{\gamma\3\cdot\gamma}{\gamma\gamma} = \rac\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma\g
                                                                                                                         ۴ = من - ب س
= 17,170 × 1733,1 × 1771,73
                        - YOA-
```

T.4711 -=

وباستخدام جداول الأعداد المقابلة للوغاريتيات نجد أن

· · · · ·)) 74 = 1

ن من = ۱۱۲۹ د د د د س

ثالثاً: النموذج ص = رأس يحوّل إلى معادلة خطية من الدرجة الأولى كها يلي:

1 = <u>oo</u>

س = أسبب

فإذا رمزنا لحاصل قسمة س على ص بالرمز ص ، فإن

ص' = أرب

مثسال:

يمتقد بأن العلاقة بين حجم المنتج (س) وعدد العيال (ص) هي من الصورة

ص = الرسد

وفَّق هذا النموذج للبيانات التالية:

.,..,..

- ***-

رابعا: يوجد ايضا بعض النهاذج الأخرى التي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية منها:

١ ـ العلاقة الأسية: ص = ب أس

ويمكن تحويلها إلى خط مستقيم على النحو التالي:

لوص = لوب + س لوأ

فإذا وضعنا: لوص = ص ، لو أ = أ لوب = ب '

فإن ص ع أ م + ب وبالتالي يمكن تقدير أ ك ب بطريقة المربعات الصغرى.

٢ _ القطع الزائد: ص = المراب

ويمكن تحويله إلى خط مستقيم على النحو التالي:

- ا_سبب = اسبب

وإذا وضعنا - ص فإن

ص على السب وبالتالي تقدّر أكاب بطريقة المربعات الصغرى.



الفصل الثانى

التقدير بفترة ثقة Interval Estimation

إذا كان المتغير س له دالة كشافة إحتيال بمعلمة واحدة θ وقدرناها بـ $\hat{\theta}$ ($\hat{\theta}$ مقدّر العزوم أو الإمكان الأكبر أو المربعات الصغرى، فإن هـ فدا المقدّر لا معنى له الا إذا كان مقترنا بمقياس للخطأ في التقدير، ولذلك فإنه يفضل القول بأن θ تقمع بين $\hat{\theta}$ - أو $\hat{\theta}$ + أ بدرجة تأكد معينة، حيث أ قيمة ثابتة نعتمد في حسابها، كما سيأتي فيها بعد، على درجة الثقة أو مستوى المعنوية وتوزيع المعاينة للمقدّر أو المقياس الاحصائي الذي يستخدم أساساً في تكوين هذه الفترة.

(١ ـ ٢ ـ ٦) فترة ثقة لمتوسط مجتمع معتاد

١ _ تباين المجتمع معلوم

إذا فرضنا أن المتغير س يتبع توزيعاً معتاداً توقعه 44 وتباينه 70 (كمية معلومة) وأحدنا من هدا المجتمع عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة من من فإن المقدار

$$\frac{\mu - \overline{\omega}}{\overline{\omega} \sqrt{\nu}} = \frac{(\omega)}{\overline{\omega}} = \omega$$

له توزيع معتاد قياسي (توقعه صفر وتباينه ۱) وبما أن التوزيع المعتاد القياسي متهائل فإن:

$$\alpha - 1 = (\frac{\pi}{\gamma} - 10)$$
 $\alpha - 1 = (\frac{\pi}{\gamma} - 10)$
 $\alpha - 1 = (\frac{\pi}{\gamma}$

وبالتعويض من (١٣ ـ ٢ ـ ٦) في (١٣ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات نجد أن فترة الثقة $(\alpha - 1)^{*}$ ($\alpha - 1$) ($\alpha - 1$

$$\alpha-1=(\frac{\sigma}{-\dot{\upsilon}\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}-1}\mathcal{C}}+\frac{\sigma}{\upsilon}>\mu>\frac{\sigma}{-\dot{\upsilon}\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}-1}\mathcal{C}}-\frac{\sigma}{\upsilon})$$

مثال:

البيانات التالية تمثل أعيار ١٠٠ مصباح كهربائي (بالساعة) أخذت كعينة من إنتاج أحد المصانم:

حدد المماييح	العمر بالساعة
٣	-17
A	-18**
١٨	-17
٣٠	- 14
**	-4
14	- ***
٧	77 78
1	المجموع

فإذا علم أن عمر المصباح الكهربـائي يتبع التـوزيع المعتـاد بتوقــع 4 وانحراف معيارى ٥ حيث ٥ = ١٠٠ ساعة .

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط أعهار المصابيح الكهربائية التي ينتجها المصنع المذكور.

س × ك	التكـــرار (ك)	مركز الفئة (س)
44	٣	14
17***	A	10
***	14	14
۰۷۰۰۰	۳٠	19
****	77	71
***	17	74
140	v	70
1984.	1	- المجموع

ومن جـدول التوزيـع المعتاد القيـاسي (جـدول رقم (٣)) فــإن ي. - ١٠.٩٠ - ١٠.٩٠

وبالتعويض في المعادلة (٢ - ٢ - ٦) فإن:

$$, 90 = (\frac{1 \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot \cdot \sqrt{1 \cdot \cdot \cdot}} + 1, 97 + 198 \wedge > \mu > \frac{1 \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot \sqrt{1 \cdot \cdot}} + 1, 97 - 198 \wedge > \chi$$

$$, 90 = (1977, 7 > \mu > 1974, 8)$$

وهـذه الفترة تعني أنـه لو أخـذنا كـل العينات الممكنة (ن - ١٠٠) من مجتمـع المدراسة وحسبنا لكل منها الوسط الحسابي وكوّنا في كل حالة فترة ثقة بالطريقة السابقة فإن ٩٥٪ من فترات الثقة تضم داخلها متوسط المجتمع 4.

٢ .. تباين المجتمع غير معلوم

$$\frac{\mu - \overline{y}}{\overline{y}} = \frac{\overline{y} - \overline{y}}{\overline{y}} = \frac{\overline{y}}{\overline{y}}$$

یتهم توزیع ت بدرجات حریة(ن - ۱)،حیث ع = $\frac{n-(m-m)^{7}}{i}$,ویما أن i-i توزیع ت متهاثل فإن:

$$\alpha - 1 = (\underline{\alpha}_{-1} < c < c) > \underline{\alpha}_{-1} = (1 - 1 - 1)$$

وبـالتعويض من (٦٥ ـ ٢ ـ ٦) في (٦٦ ـ ٢ ـ ٦) وتحــويل المتبــاينات فــلان فــترة الثقة (١ - ٢٠ / ٥٠ (٪ لمتوسط المجتمع المعتاد ٤٤ هـى :

$$\alpha-1=(\frac{\frac{\ell}{\dot{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}},\dot{\omega}+\dot{\omega}>\mu>\frac{\ell}{\dot{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}},\dot{\omega}-\dot{\omega}})$$

(7 - 7 - 3V)

إذا فرضنا في المثال المعطى في (١ ـ ٢ ـ ٦) أن تباين المجتمع ∇^{V} غير معلوم فإنه يلزم لحساب فترة الثقة لمتوسط المجتمع علم تقدير تباين المجتمع ∇^{V} بتباين العينة (∇^{V}) والذي يمكن حسابه على النحو التالى:

إذا فرضنا في مثال الفقرة (١ ـ ٢ ـ ٦) أن تباين عمر المصباح الكهربائي 7 غير معلوم فإننا نقدره بالمقدر غير المتحيز 7 = $\frac{1}{1-1}$ معلوم فإننا نقدره بالمقدر غير المتحيز 7 وذلك على النحو التالى:

(س - س) ال	(س – س)	<i>س</i> - س
1109011	A3F 3+PF13	-= 198A - 14
17.0784	. 7 8 8 8 8	••• - A3P/ = -
11.4.4	110·8 YEA	148A - 1V.
7417*	A3 3.77	· · P/ - A3 P/ = -
0 · AYAA	771-8 107	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
ASAFASI	1779 - 8 - 1771	***** = N3 Pf =
APPYTIT	7.54.5 001	*** - A3P/ =
ANTERIA		
= ۳ر۲۸۷ ساعة	کر۲۱۲ر۲۹۰۸ =	$3 = \sqrt{\frac{1 - 1 \cdot 1}{1 - 1}}$

ومن جـ لول تــوزيــع ت (جـ لول رقـم (٥)) فــإن تـ،٩٩٥ = ١,٩٩ والتعويض في (٦/٧ - ٢ - ٦)، فإن فترة الثقة ٩٠,٠٠ لمتوسط عمر المصباح الكهربائي للم هى:

$$\int_{(A3P)}^{(A3P)} - PP, l \times \frac{y, \forall \lambda \gamma}{\sqrt{\cdots l}} < \mu < \lambda 3Pl + PP, l \times \frac{y, \forall \lambda \gamma}{\sqrt{\cdots l}}) = 0.00$$

ح (۲ر ۱۸۹۰ > μ> ۸ره ۲۰۰۰) = ۹۵،۰

(٢-٢-٢) فترة ثقة للنسبة

نود في كثير من الأحيان تقدير نسبة الفردات في مجتمع معين (ح) التي تحمل صفة معينة، ولقد سبق أن قدرنا هذه النسبة بنقطة. ولكي نقدر ح بفترة ثقة فإنه يكن استخدام توزيع ذي الحدين أو تـوزيع الهايرجيـومترك (لمعرفة أوجه التشابه والاختلاف بين توزيع ذي الحدين وتوزيع الهايرجيـومترك يرجع القارى، إلى الفصل الأول من الباب الرابع). ولصعوبة العمليات الحسابية وكثرتها في استخدام هذين التوزيعين فإننا نستخدم التوزيع العليمي في تكوين هذه الفترة، حيث أنه يمكن تقريب تـوزيع ذي الحدين (متقـ طم) بالتـوزيع العليمي (متصل) إذا كـانت من كبيرة وح لا تختلف كثيـراً عن $\frac{1}{Y}$ (انظر ح = $\frac{1}{Y}$ أو إذا كـانت ن كبيرة وح لا تختلف كثيـراً عن $\frac{1}{Y}$ (انظر يكون عدد المفردات التي تحمل صفة معينة مثلا هو ٥ يسـاوي إحيال أن تقم قيمة المغير العليمي بين ٥ , ٤ و٥ , ٥

فإن أخذنا عينة عشوائية حجمها 0 من مجتمع ما نسبة مفرداته التي تحمل الصفة موضوع الدراسة هي ح وكانت نسبة المفردات في المينة التي تحمل هذه الصفة هي $^{\wedge}$. فإن المقدار .

$$S = \frac{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}} = \frac{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}} = \frac{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}} = \frac{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}} = \hat{\zeta}$$

له توزيع معتاد قياسي (توقعه صغر وتباينه ۱) (أنظر المعادلة (٣٣ ـ ١ - ٥))، وبالتالي نصرف فترة الثقة في هذه الحالة بالتعويض من (٦٦ - ٢ - ٢) في (٦٣ ـ ٢ -٢):

$$\frac{(2^{n-1})^{\frac{n}{2}}}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{7}}\sqrt{2}+3\sqrt{2}+$$

مثال :

إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها ٥٠٠ من القوة العاملة في بلد ما ووجدنا أن من بينهم ٤٠ شخصا عاطلين عن العمل، كون فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة العاطلين عن العمل في هذا البلد.

الحل

$$^{\diamond}, ^{\diamond}A = \frac{c}{c} = \frac{c}{c} = A^{\diamond}, ^{\diamond}$$

من جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (٣)) ي.٩٧٠ = ١,٩٦

وبالتعويض في (٦٩ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$1,47+\cdot,\cdot,\lambda >_{\bigcirc} \xrightarrow{\cdot,0} \xrightarrow{\cdot,0} 1,47-\cdot,\cdot,\lambda >_{\bigcirc} \\ 0,0,0 = (\frac{\cdot,0,0}{\cdot,0,0}) \xrightarrow{\cdot,0} 1$$

of at

(٣ ـ ٢ ـ ٦) فترات الثقة للفروق والمجاميع

أولاً: فترات ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين

إذا كان س، مجتمعا معتادا توقعه μ_{k} وتباينه κ وكان س، مجتمعا معتادا أيضاً توقعه μ_{k} وتباينه على مستقلتين أحجامها ن، فرقعه على التوالى، حيث أن:

س١٠١ س ٢١٥ ، س ١٦٥ مأخوذة من المجتمع س ١ س ١٦٥ منوذة من المجتمع س

فإننا نكون فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين س،، س، في الحالتين التاليين:

$$\sqrt{\sigma}$$
 معلومتین معلومتین $\sqrt{\sigma}$ $\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}$ (کمیة غیر معلومة)

أما إذا كانت ٢٥ مخ ٧٥ وكل منها غير معلومة فإن الطريقة المستخدمة في تكوني فترة الثقة هي طريقة Fisher-Behrens ولن نتعرض لـدراستها في هسذا الكتاب.

١ . فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين معتادين إذا كانت γο ، γο كميتين معلومتين:

إن المقدَّر أو المقياس الإحصائي المستخدم في تكوين فترة الثقة هو س ، - س ، م حيث س ، الوسط الحسابي للعينة الأولى المأخوذة من المجتمع الأول س، وس ، همو الوسط الحسابي للعينة الثانية المأخوذة من المجتمع الثاني س، كما أن

$$\frac{7\sigma}{\tau^{i}} + \frac{7\sigma}{\tau^{i}} = \frac{7\sigma}{\tau^{i}} = \frac{7\sigma}{\tau^{i}} + \frac{7\sigma}{\tau^{i}} = \frac{7\sigma$$

لذا فإن المقدار

$$\omega = \frac{(\sqrt{10^{\circ} - \sqrt{10^{\circ}})^{\circ}} - (\sqrt{10^{\circ} - \sqrt{10^{\circ}}})}{\sqrt{10^{\circ} + \sqrt{10^{\circ}}}} = \omega$$

له توزيع معتاد قياسي توقعه صفر وتباينه ١. وباستخدام خواص التوزيع المعتاد القياسي فإن

$$\alpha - 1 = \frac{\alpha}{\tau} - \infty > \infty > \frac{\pi}{\tau} > 0$$

$$e_{\tau} = \frac{\alpha}{\tau} - \frac{\pi}{\tau} > 0$$

$$e_{\tau} = \frac{\pi}{\tau} - \frac{\pi}{\tau} > 0$$

$$+ \frac{\overline{v_{i}^{\gamma} - \overline{v_{i}^{\gamma}}}}{\overline{v_{i}^{\gamma}} + \overline{v_{i}^{\gamma}}})$$

$$(7-Y-Y1) \qquad \alpha-1=$$

مثيال:

الجمدول التالي بيسين إنتاجية (وحدة في اليسوم) مجموعتين مستقلتين من العمال حجم كل منها ١٠، مأخوذتين بشكل عشسوائي من العمال السذين يعملون في مصنعين مختلفين أ، ب:

المنع ب	المصنع أ	العامسل
7.	0 8	١
04	67	*
٥٧	۰۰	٣
٥٦	٥٢	٤
70	٥٤	٥
٥٨	٥٧	٦
7.7	٥٦	٧
٥٥	٥٢	٨
٥٤	07	4
78	**	1.

فإذا علم أن الانحراف المعياري للإنتاج اليومي للعامل الواحد في المصنع أ هو إلى وحدات والانحراف المعياري للإنتاج اليومي للعامل المواحد في المصنع ب هو ٨، فإنه يمكن تقدير الفرق بين متوسط إنتاجية العامل في اليوم في المصنع أ ومتوسط إنتاجية العامل في اليوم في المصنع ب بنقطة ويفترة ثقة على النحو التالي:

$$0\xi = \frac{0\xi^{*}}{1^{*}} = \frac{7^{*} + \dots + 0\xi}{1^{*}} = \frac{30}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7^{*}}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7^{*}}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{0A^{*}}{1^{*}} = \frac{7\xi + \dots + 0\xi + 7\xi}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$0A = \frac{1}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

$$1A = \frac{1}{1^{*}} = \frac{1}{1^{*}}$$

أما التقدير بفترة ثقة ٩٥٪ مثلًا فإنه يمكن حسابه بـالتعويض في (٧١_ ٢ ـ ٦) كما يلي:

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{(30-\Lambda 0)}{(30-\Lambda 0)} - 7P, 1 \sqrt{\frac{77}{1}} + \frac{37}{1} + \frac{37}{1} < \mu_{1} - \mu_{7} < (30-\Lambda 0) + \frac{77}{1} + \frac{37}{1} \right) = 0P,$$

 \cdot , 40 = (Y, 1477 > μ - μ > 1., 1477 -)

 $\sigma = \sqrt[4]{\sigma} = \sqrt[4]{\sigma} = \sqrt[4]{\sigma}$ خبر معاومت إذا كمانت $\sigma = \sqrt[4]{\sigma} = \sqrt[4]{\sigma}$ (كمية غبر معاومة):

إن المنسدّر أو المقياس الاحصائي المستخدم في تكوين فسترة الثقة همو (س، - س، و) حيث أن س، الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الاول س، س، س، الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الاول س، عن و الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الاول س، كم أن:

لذا فإن المقدار

$$(7-7-1)$$

$$\frac{(-1)^{2}-(-1)^{2}}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}\sqrt{1}}$$

Pooled or Combi- التباین التجمیعي 4 التباین التجمیعي التجمیعي التجمیعي ned variance

ويمكن حسابه كها يلي:

$$\frac{\sqrt{(v_{i}^{-1}-v_{i}^{-1})^{7}+\frac{v_{i}^{-1}}{(v_{i}^{-1}-v_{i}^{-1})^{7}+\frac{v_{i}^{-1}}{(v_{i}^{-1}-v_{i}^{-1})^{7}}}{V_{i}^{-1}+v$$

وباستخدام خواص توزيع ت فان

$$(7-7-7) \qquad \qquad \alpha-1=(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{2}) > \frac{\alpha}{2}$$

وبالتعـويض من (۲-۲-۲)، (۲-۲-۲) في (۲-۲-۲) و تحـويـــل المباينات فإن
$$(\sqrt{w}, -\sqrt{w})$$
 $= \sqrt{(\sqrt{w}, -\sqrt{w})}$ $= \sqrt{(\sqrt{w}, -\sqrt{w})}$

مثال ١:

إذا كان متوسط عمر المصباح الكهربائي لعينة عشوائية مكونة من 100 مصباحاً مأخوذة من إنتاج المصنع أهو 1800 ساعة والانحراف المعياري للعمر من هذه المينة 170 ساعة ومتوسط عمر المصباح الكهربائي لعينة عشوائية مكونة من 700 مصباح مأخوذة من إنتاج المصنع ب هو 170 ساعة والانحراف المعياري للعمر في هذه العينة هو ٨٥ ساعة، وإذا كانت العيتان العشوائيتان مستقلتين أوجد فترة ثقة 29٪ للفرق بين متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع أ ومتوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع أ يساوي تباين عمر المصباح في المصنع أ يساوي تباين عمر المصباح في المصنع أ يساوي تباين عمر المصباح في المصنع ب).

لإيجاد فترة الثقة، فإنه يلزم حساب التباين التجميعي ⁷7 بالتعويض في المعادلـة (٧٣ ـ ٢ - ٦).

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 - (17 \cdots - 18 \cdots)} \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} \sqrt{99,17 \times 7,077 + (17 \cdots - 18 \cdots)} > {\gamma}\mu - {\gamma}\mu > \\ \frac{1}{\gamma \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} + \frac{10 \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} + \frac{1}{10 \cdots} + \frac{1}{$$

مثسال ۲:

لدراسة الفرق بين متوسط انتاجية العامل في مصنعين مختلفين أ، ب، قــام المســـؤولـون عــن الإنتــاج بتسحيل إنتاجية ٩ عمال في كل من المصنعين وكانت النتائج على النحو التالي:

قدر الفرق بين متوسط الإنساجية في المصنع أ ومتوسط الانتاجية في المصنع ب بفترة ثقة ٩٥٪، إذا علم أن الانتاجية تتبع التوزيع الطبيعي كما أن الباين في الإنتاجية في المصنع ب التباين في الانتاجية في المصنع ب

الحيل:

إذا رمزنا لانتاجية العامل ر في المصنع أ بالرمز س.ر وإنتاجية العامل ر في المصنع ب بالرمز س.د

فإن :

$$\text{To},\text{YY} = \frac{\text{YYV}}{q} = \frac{\text{YYV}}{q} = \frac{1}{q}$$

$$\Upsilon 1, \circ \gamma = \frac{\gamma \Lambda \xi}{q} = \frac{\gamma \Lambda \zeta}{q} = \gamma \circ , \Upsilon \Upsilon = \frac{\gamma \Lambda \gamma}{q} = \gamma \circ , \Upsilon \Upsilon$$

$$\frac{q_{r}}{1-1}(m_{r}-m_{r})^{2}=70,001$$

وبالتعويض في (٧٣ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$\xi, \forall 1 = \overline{77,75} = \overset{\wedge}{\sigma}$$

۲.۱۲۰ = ۱۲.۰.۹۷۰ ت

وبالتعويض في (٧٥ ـ ٣ ـ ٦) فإن:

$$\bullet, q = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{$$

أي أن:

$$\sigma_{1}(r, r-1)$$
 = $\sigma_{1}(r-1)$ = $\sigma_{2}(r-1)$ = $\sigma_{2}(r-1)$

 $(\Lambda, TV > {}_{\tau}\mu - {}_{1}\mu > 1, \cdot \circ -)$

ثانياً: فترة ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين:

افرض أن لدينا مجتمعين m_1 ، m_2 ، وأن نسبة النجاح في المجتمع الأول هي m_2 ، ونسبة النجاح في المجتمع الثاني هي m_2 ، وأخذنا عينة من المجتمع الأول حجمها m_2 ، وعينة من المجتمع الثاني مستقلة عن العينة الأولى حجمها m_2 ، ووجدنا أن عدد المفردات التي تحمل الصفة عمل المدراسة في العينة الأولى هو m_2 ، وعددها في العينة الثانية هو m_2 ، فإنه يمكن تقدير الفرق بين m_2 ، m_3 ، وح m_4 بالمقدّر أو المقياس الاحصائي m_2 ، m_3 و المستقين بدرجة ثقة معينة فإننا نفرض أن حجم العينة كبير (ن × ح > 0 ، ن (۱ - ح) > 0) بحيث يمكن القسول بأن توزيع المعاينة للنسبة من المينة هو توزيع طبيعي .

وحيث أن العينتين مستقلتان فإن:

$$\begin{array}{ll} \overset{\wedge}{\smile} \overset{\wedge}{\smile} \overset{\wedge}{\smile} \overset{\wedge}{\smile} \overset{\wedge}{\smile} \overset{\vee}{\smile} \overset{\smile}{\smile} \overset{\smile}{\smile$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} +$$

لذا فإن توزيع المعاينة للمقدار. ^

$$\frac{(1-1-1)}{(1-1)} = \frac{(1-1)}{(1-1)} = 0$$

هو معتاد قيماسي توقعه صفر وتبـاينه ١. وبـاستخدام خـواص التوزيـع المعتاد الفياسي:

$$\alpha - 1 = \left(\frac{\alpha}{\tau} \cdot \frac{C}{1} > C > \frac{\alpha}{\tau} \cdot C\right)$$

وبالتعويض من (٧٦ ـ ٢ ـ ٦) في (٧٧ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل امتباينات فإن:

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2i, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2},) + 2i, -\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}, (1 - \frac{\lambda}{2}, i)} + \frac{\lambda}{2i} + \frac{\lambda}{2i} (1 - \frac{\lambda}{2}, i)}{i} = 1 - \alpha$$

 $(\Lambda - \Upsilon - V\Lambda)$

مثسال:

اخترنا عبنتين عشواثيتين مستقلتين من مجتمعي الراشدين والمراهقين، في بلد يعرض فيه برنامجاً تلفزيونياً معيناً، الأولى حجمها ٤٠٠ راشد والثانية حجمها ٢٠٠ مراهق. فإذا أشار ١٠٠ من أفراد عينة الراشدين و ٣٠٠ من أفراد عينة المراشدين و ٣٠٠ من أفراد عينة المراشدين ألم يجبون البرنامج المذكور، احسب فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين نسبتي الراشدين والمراهقين الذين يتابعون البرنامج المشار إليه في هذا البلد.

الحسل:

$$\frac{1}{2}$$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}$

$$\frac{\lambda}{2r} = \frac{\dot{c}_r}{c_r} = \frac{\cdot \cdot r}{\cdot \cdot \cdot r} = \cdot \circ, \cdot$$

ا ۱,۹٦ = . ۹۷۵

> +5- +5>

٤ ـ ٢ ـ ٦) فترة ثقة للتباين:

إذا فرضنا أن س٠، س٠، ... سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة من مجتمع معتاد توقعه مهم وتباينه σ وهما غير معلومتين، فإن المقدار:

$$\chi^{\gamma} = \frac{\frac{3}{\sqrt{1-\gamma}}(v_{U_{i}} - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}})}{v_{\sigma}} = \frac{v_{U_{i}} - \frac{3}{\sqrt{1-\gamma}}}{v_{\sigma}} = v_{\chi}$$

له توزیع X^۲ بدرجات حریة (ن - ۱).

يمكن تكوين فترة ثقة للتباين σ باستخدام التعريف التالي:

$$\alpha - 1 = \left(\sqrt[r]{\chi} > \frac{\sqrt[r]{(r_0 - r_0)} - \frac{1}{1 - r_0}}{\sqrt[r]{\alpha}} > \sqrt[r]{\chi}\right)$$

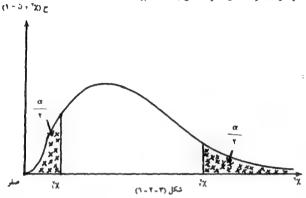
حيث ٢٪ القيمة الصغرى، ٢٪ القيمة الكبرى.

وحيث أن دالة كتافة الاحتمال للمتغير X' غير متهاتلة فإنه يوجد بعض الحرية في اختيار قيمتي X'، X' والقيد الوحيد في عملية الاختيار هو أن تكون فـترة الثقة أقصر ما يمكن Shortest Interval بحيث تكون المساحة تحتى المنحق بـين X'، X' ساوى X' أن أقصر فترة ثقة يمكن الحصول عليها إذا كان

$$\frac{\alpha}{\gamma}$$
 التي أقل منها مساحة أي قيمة χ^{γ} التي أقل منها مساحة $\frac{\alpha}{\gamma}$

$$\frac{\alpha}{\gamma}$$
 منها مساحة χ^{7} التي أقل منها مساحة γ

كها هو مبين في الشكل التالي (شكل (٣-٢-٦))



وبالتعويض عن X^{\prime} X X^{\prime} بالقيمتين X^{\prime} X^{\prime} X^{\prime} . X^{\prime} على التوالي في المعادلة (X-Y-Y-Y) فإن

$$\alpha - 1 = (\frac{\alpha}{1 - 1} \sqrt{\chi}) > \frac{\sqrt{\chi} (1 - \omega)}{\sqrt{\sigma}} > \frac{\alpha}{1 - 1} \sqrt{\chi}$$

(7-Y-V9)

وبإعادة ترتيب المتباينات في المعادلة (٧٩ ـ ٢ ـ ٦) نحصل على:

$$(7-7-1) \qquad \alpha-1=\left(\frac{\chi_{(1-\alpha)}^{2}}{\frac{\alpha}{\tau}}> \alpha < \frac{\chi_{(1-\alpha)}}{\chi_{(1-\alpha)}^{2}}\right) < \frac{1}{\tau}$$

مثسال:

أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٥ إطار من إطارات السيارات التي تتنجها إحدى الشركات وحصلنا من هذه العينة على النتائج التالية:

عدد الإطارات	مدة خدمة الاطار (بالألف كم)
٣	- Y•
0	- 77
٨	- 78
٧	-77
٧	4. - 4V
Yo	المجموع

والمطلوب تقدير تباين مدة الخدمة للإطارات التي تنتجها هـذه الشركة بـدرجة ثقـة 90٪.

الحل

ے' × د	ح ك	الإنحراف المختزل	عدد الإطارات	مركز الفئة س	فثات الحدمة
		ءَ			(بالألف كم)
17	7 -	Y -	٣	*1	- Y+
٥	0 -	1 -	0	AA.	- 77
صقو	صقر `	صقو	A	Yo	- 75
٧	٧	1+	٧	44	- 77
A	£	Ψ+	ΥΥ	75	- YA
44	مغر		oy		المجموع
	ب کم	٢ + ٥٧ = ٥٢ ألف	= صفر ×	دمة الإطار س	متوسط مدة خا
		(صفر)۲)	$= \gamma^{\gamma} \left(\frac{\gamma \gamma}{\circ \gamma} \right)$	ة الإطارع ^٣	تباين مدة خدم
			17A =		
		، کم۲	= ۱۲, ٥ الف		
		37	= 07-/=	('-')	درجات الحرية

$$x^{Y} c Y^{*}, *, 3Y = // * * 3, Y/$$
 $x^{Y} c Y P^{*}, * 3Y = // 3 F Y, P Y$

وبالتعويض في (٨٠ ـ ٢ ـ ٦)

$$\cdot, q_0 = \left(\frac{(0,17)70}{17.5\cdot 11} > r_0 > \frac{(0,17)70}{79.7751}\right)_{\sim}$$

 \cdot , $40 = (1 \cdot , \text{TTIV} > ^{\text{T}} \sigma > \text{T'}, \text{TOIV})_{\text{T}}$

(٥ ـ ٢ ـ ٦) فترة ثقة للإنحراف المباري لمجتمع معتاد

إذا كان لدينا متغير عشوائي س توقعه μ وتباينه δ وأخذنا من هذا المتغير عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة س، ک س، ک ک س، فإن الإنحراف المعاري لهذه المجموعة من المشاهدات المستقلة هو

$$3 = \sqrt{\frac{1}{\frac{2^{i}}{1-x^{i}}} \left(\omega_{i,x} + \omega_{i} \right)^{\gamma}}$$

وهو مقدّر متحيز للمعلمة σ.

فإذا كان المتغير س يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 4 وتباين ٥٠ فإن

$$\vec{\psi}(\vec{\beta}) = \frac{\sigma^{7}}{7 \cdot C}$$

أما إذا كان مجتمع س غير معتاد فإن

$$\frac{\sqrt[4]{\mu_1 - \mu_1}}{\sqrt[4]{\mu_2}}$$

حيث عمر 6 مر العزمين الثاني والرابع حول الوسط الحسابي

من المعلوم أنه إذا كان مجتمع س معتاداً فإن

 $^{Y}\sigma = _{Y}\mu$

$$\mu_{i} = \gamma_{\sigma^{i}}$$
 (3.4 – 7 – 7)

وبالتعويض من (٨٤ ٢ ـ ٦) في (٨٣ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$(3 - 1 - 1)^2 = \frac{^7\sigma}{7\sigma}$$
 وهي نفس التيجة المعطاة بالمادلة (٨٠ - ١ - ١)

وبشكل عام إذا كان حجم العينة كبيراً (ن ≥ ١٠٠) فإن توزيع المعاينة للمقـــــّـر ع هو التوزيع الطبيعي تقريباً وبالتالي فإن:

$$\alpha - 1 = \left(\frac{\sigma - \xi}{\frac{\sigma}{\tau}} > \frac{\sigma - \xi}{\frac{\sigma}{\tau}} > \frac{\sigma}{\tau}\right)$$

وبتحویل المتباینات فی (۸۰ م ۲ - ۲) فإن

$$\alpha - 1 = \left(\frac{\overset{\wedge}{\sigma}}{\overset{\alpha}{i}} - \underbrace{\overset{\alpha}{\sigma}}_{\tau} - \underbrace{\overset{\alpha}{\sigma}}_{\tau}$$

(TA - T - I)حيث σ = ع.

مثال:

اخترت عينة عشوائية حجمها ١٣١ أسرة من بين الأسر التي تسكن في منطقة معينة وقد تبيَّن أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية للأسر في العينة كما يلي:

فئات الدخل	عدد الأسر
الشهري بالدينار	
4 1	1.
*** - ***	٤٠
2 4	11
0 * * - { * *	1.4
70	9
المجموع	171

والمطلوب: تقدير الإنحراف المعياري للدخل بفترة ثقة ٩٥٪.

الحل

₹×₽	ح×೬	الانحرافات المختزلة خ	التكرار (ك)	مركز الفئةس
ŧ٠	۲	۲ -	۱۰	10.
٤٠	£*-	1 -	٤٠	¥0.
صقر	صقر	صقر	2.2	* 0 •
1A	1A	1+	14	£0+
T'1	1.4	Y +	4	00+
371	48 -		171	المجموع
		\(\frac{\tau\{\tau\}}{1\tau\}\) \(\frac{\tau\{\tau\}}{1\tau\}\		٤

ومن جدول رقم (٣) فإن

وبالتعويض في (١٠-٣-١٦) وبالتعويض في (١٠-٣-١٦)
$$\frac{1\cdot r_{\nu}r_{\xi}q}{1\cdot r_{\nu}\cdot r_{\nu}\cdot r_{\xi}q}$$
 $> \sigma > \frac{1\cdot r_{\nu}r_{\xi}q}{1\cdot r_{\nu}\cdot r_{\nu}\cdot r_{\xi}q}$

.40 =

خ (۱۱۲ر ۶۰ ح ح < ۱۱۲ر ۱۱۹) = ۹۰، ۱۹۰

(٢-٢-١) فترة ثقة لمعامل الارتباط

نقدّر معامل الارتباط ρ بين مجتمعين بمعامل ارتباط بيرسون (ر) بين مجموعة من أزواج القيم المتناظرة مأخوذة من هذين المجتمعين. ولتقديره بفترة ثقة فإننا نستخدم تحويل فيشر Fisher's Z Transformation التالي:

$$v = \frac{1}{V} \text{ Li}\left(\frac{1+V}{1-V}\right) = 7101, 10 \left(\frac{1+V}{1-V}\right)$$

حيث لن اللوغاريتم للأساس هـ ولـو اللوغـاريتم لـلأسـاس ١٠ والمقـدار س يتبـع التوزيع الطبيعي بتوقع

$$\mu = \frac{1}{\gamma}$$
 لن $\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)$ = 1,101% لو $\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)$ وانحراف معياري = $\frac{1}{2\sqrt{1-\gamma}}$

وفترة الثقة يمكن تكوينها على النحو التالى:

$$(7-Y-AA) \qquad \qquad \alpha-1=\left(\frac{\alpha}{\tau},\varsigma>\frac{\mu-\omega}{\sigma}>\frac{\alpha}{\tau}\varsigma\right)$$

وبتحويل المتباينات في (٨٨ ـ ٣ ـ ٦) فإن

$$\alpha - 1 = (\frac{\alpha}{\tau} - 1) + \lambda = (\frac{\alpha}{\tau} - 1)$$
 (۲-۸۹) $\alpha - 1 = (\frac{\alpha}{\tau} - 1) + \lambda = 0$ ومن (۲-۸۹) بكن حساب فترة ثقة (۱ - α) ۱۰۰٪ لمعامل الارتباط بــين المجتمعين لأن α دالة في α .

مثال:

إذا كان معامل الارتباط بين رأس المال والربح لمجموعة مكونة من ٤٠ محلًا تجارياً في مدينة معينة هو ٠,٩٠، أوجمد فترة ثقة ٠,٩٥ لمعامل الارتباط بمين رأس المال والربح.

الحل

بالتعويض في (٨٩ ــ ٢ ــ ٦) نجد أن

ر ۱,۱۵۱۳) لو ۱۹ - ۱,۲۲۲۲
$$>$$
 μ $>$ ۱,۱۵۱۳ لبو ۱۹ $+$ ۲۲۲۲ $+$ ۱۹ هـ ۱,۱۵۱۳ $+$ ۱۹ هـ ۱,۱۵۱۳ هـ ۱,۱۵۲ هـ ۱,۱۵۱۳ هـ ۱,۱۵۲ ه

$$\cdot, 40 = (1, 420 > \mu > 1, 10 \cdot 1)$$

اذا كانت
$$\mu = 1,1001$$

$$\frac{\rho+1}{6}$$
فإن ۱,۱۵۰۱ = ۱,۱۵۰۳ لو

$$\frac{1}{1} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho - 1} d\rho = \frac{\rho + 1}{\rho - 1}$$

ومن جداول الأعداد المقابلة للوغاريتهات فإن

$$q \cdot q = \frac{\rho + 1}{\rho - 1}$$

$$p + 1 = p \cdot q \cdot q \vee v - q \cdot q \vee v$$

$$1 - 9,900 = 0.1.900$$

•, ANVA =
$$\frac{A, 4VV}{1.4VV} = \rho$$
 ...

اما إذا كانت $\mu = 0.00$ أما

$$\frac{\rho+1}{600}$$
فإن مع ۲۹, ۱ و $\frac{\rho+1}{1000}$

$$1,00$$
مي أن لو $\frac{\rho+1}{\rho-1}$

ومن جداول الأعداد المقابلة للوغاريتيات فإن

$$r_{1}, r_{2} = \frac{\rho + 1}{\rho - 1}$$

$$\label{eq:problem} \Upsilon \circ , \Upsilon \circ = \rho \ \Upsilon V \ , \Upsilon \circ \qquad \rho + 1 = \rho \ \Upsilon T \ , \Upsilon \circ - \Upsilon T \ , \Upsilon \circ$$

$$\therefore q = \frac{\gamma, o\gamma}{\gamma, v\gamma} = \gamma \tau 3P, \bullet$$

وبالتالى فإن

·, 90 = (*, 9877 > p > ·, A1VA) -

 (٧ - ٢ - ٦) فترات ثقة لمعالم النموذج الخطي البسيط والقيمة الإنجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل

أولًا: فترة ثقة لمعامل انحدار ص على س

من المعلوم أن المقدار

$$\frac{1-\uparrow}{\frac{\text{MSE}}{\uparrow \sigma}} = \frac{1-\uparrow}{\uparrow \sigma} = \frac{1-\uparrow}{\uparrow \sigma}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن-٢)

وبما أن توزيع ت متهائل فإن

$$(7-7-7) \qquad \alpha-1=(\frac{\alpha}{7}-7) \Rightarrow \frac{\alpha}{7} \Rightarrow 0$$

وبالتعويض من (٣٥- ٢ - ٦) ، (٩٠ - ٢ - ٦) في (٩١ - ٢ - ٦) وتحويـل المتابنات نحد أن

$$+ \uparrow > 1 > \frac{MSE \sqrt{\frac{\alpha}{1 - 1}} - \frac{\alpha}{1 - 1}}{\sqrt{\frac{\alpha}{1 - 1}} - \frac{\alpha}{1 - 1}}$$

$$(7-7-97) \qquad \alpha-1=\left(\frac{\overline{MSE}\sqrt{r}}{\overline{r}(\overline{r}-r-r)-\frac{3r^2}{r}\sqrt{r}}\right)^{\frac{\alpha}{r}-1}$$

مثال:

بالرجوع إلى بيانـات التمرين التـوضيحي ١ في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب هو تكوين فترة ثقة ٩٥,٠ للمعلمة أ ، فإن $\hat{\rho}$ = ٢,١ ح

درجات الحرية = ن - ٢ = ٥ - ٢ = ٣

•. TTY = MSE = $^{Y}\sigma$

 $T, 1\Lambda = (0)$ من جلول رقم $T, 1\Lambda = (0)$

$$\frac{9}{(m_{1}-m_{2})^{2}} = (m_{1}-m_{1})^{2} + (m_{1}-m_{1})^{2}$$

وبالتعويض في (٩٢ - ٢ - ٢) نجد أن

ثانياً: فترة ثقة للمعلمة ب (الجزء المقطوع من محور الصادات)

من المعلوم أن

وبما أن توزيع ت متماثل فإن:

$$\alpha - 1 = (\frac{\alpha}{\tau} - 1) > \overline{\alpha} > 0$$

وبــالتعـويض من (٣٧ ـ ٢ ـ ٦)، (٩٣ ـ ٢ ـ ٦) في (٩٤ ـ ٢ ـ ٦) وتحــويـــل. المتابنات فان:

$$> \psi > \left\{ \frac{1}{\sqrt{(w^{-} - w^{-})}} + \frac{1}{\psi} \right\} MSE \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}, \psi - \stackrel{\wedge}{\psi}$$

$$\alpha - 1 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{w^{-} - w^{-})}}{\sqrt{(w^{-} - w^{-})}} + \frac{1}{\psi} \right\} MSE \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}, \psi + \stackrel{\wedge}{\psi}$$

$$(7 - 7 - 9)$$

مشال:

بالرجوع إلى بيانات التمرين التـوضيحي ١ في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب تكوين فترة ثقة ٩٥٪ للمعلمة ب ، فإن

$$\Psi, 1A = (0)$$
 (من جلول رقم (۵) = $\Psi_0, 1A = (0)$ $\Psi_0, 1A = (0)$

وبالتعويض في (٩٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$> \downarrow > \frac{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} \right) }{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} \right) }$$

ای آن

ح (۲۶,۰ < ب < ۹۵۳,٥) = ۹۸,۰

ثالثاً: فترة ثقة للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل صر المعلوم أن

له توزيع ت بدرجات حرية ن - ٢

وباستخدام خاصية التهاثل لتوزيع ت فإن

$$\alpha - \gamma = (\frac{\alpha}{\tau} - \gamma) > \frac{\alpha}{\tau} = \gamma$$

وبالتعويض من (٤١ ـ ٢ ـ ٦)، (٩٦ ـ ٣ ـ ٦) في (٩٧ ـ ٢ ـ ٦) وتحـويل المتبـاينات فإن

$$> (\omega_0 - \omega_1 - \omega_0) = \sqrt{\frac{v_0 - v_0}{v_0} + \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} - \omega_0} > \sqrt{\frac{\alpha}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{1}{v_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{v_0} + \frac{$$

$$\alpha - 1 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{(m^2 - m)}}{\sqrt{(m^2 - m)}} + \frac{1}{i} \right) MSE \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - 1} + \frac{\Lambda}{m} \right\}$$

$$(7 - 7 - 9\Lambda)$$

مسال:

بالرجوع إلى بيانــات التمرين التــوضيحي، في الفصل الأول من هــذا الباب، وإذا كان المطنوب هو تكوين فترة ثقة ٩٥، • للقيمــة الإتجاهــة للمتغير التــابع عنــدما - ٢٨٦ -

· , ۲٥ = ۳(٣ - ۲,٥) = ۲(س، - من)

وبالتعويض في (٩٨ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

 $> \langle \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > > \frac{\langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\vee}{\circ} \rangle}{\langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\vee}{\circ} \rangle} > \frac{\langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\vee}{\circ} \rangle}{\langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\vee}{\circ} \rangle} > \langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\circ}{\circ}, \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\circ}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\wedge}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\wedge}{\circ}, \stackrel{\rangle}{\circ} \rangle > \langle \stackrel{\vee}{$

أي أن

ح (۲,۷٥) = ٥٩,١٥ ح (٩,١٥) = ٩٥,٠٥

٨ - ٢ - ٦) فترات ثقة لمعالم النموذج الخطي العام والقيمة الإتجاهية للمتغير التابع
 عند مستوبات معينة للمتغيرات المستقلة

. أولاً: فترة ثقة للمعلمة أر في النموذج (٢٠ - ٢ - ٢)

$$c = \frac{1}{1 - 1} \cdot \frac{1}{1 - 1$$

له توزيع ت بدرجات حرية ن - و

وباستخدام خاصية التهائل لتوزيع ت فإن

$$\alpha - 1 = \left(\frac{\alpha}{\tau} - 1^{-1}\right) > \frac{\alpha}{\tau} > 0$$

وبــالـتعــويض مـن (٧٧ ـ ٢ ـ ٦) ، (٩٩ ـ ٢ ـ ٦) في (١٠٠ ـ ٢ ـ ٦) وتحــويـــل المتباينات فإن فترة الثقة للمعلمة أرهى:

مثسال:

بالرجوع إلى بيانــات التمرين التــوضيحي ٢ في الفصل الأول من هـــــذا البــاب. وإذا كان المطلوب هو تكوين فترة ٩٥٠, • للمعلمة أ, مثلًا، فإن

درجات الحرية = ن - ٣ = ١٦ - ٣ = ١٣

ت مهم ١٦٠ (باستخدام جدول رقم (٥)) = ٢, ١٦

$$11 \cdot = \cdot \cdot \circ \times 77 \cdot = .7\sigma$$

وبالتعويض في (١٠١ ـ ٢ ـ ٦) فإن

·, 40 = (77, 70 & 7 > 17, 780V) -

ثانياً: فترة ثقة للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستويـات محدّدة للمتغـيرات المستقلة في النموذج الخطى العام.

من المعلوم أن المقدار

$$= \frac{\hat{\phi}_{\alpha} - \hat{\psi}_{\alpha}}{\hat{\phi}_{\alpha}} = 0$$

يتبع التوزيع ت بدرجات حرية ن – و

ومن خاصية التهائل لتوزيع ت فإن

$$(7-7-1.7) \qquad \qquad \alpha-1=(\frac{\alpha}{7},\tau>\tau>\frac{\alpha}{7}\tau)$$

وبالتعويض من (٦٠ ـ ٢ ـ ٦)، (١٠٢ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات فإن

$$>$$
 $(\frac{\wedge}{\omega_n})^{-1} = \frac{1}{\omega_n} (\frac{1}{\omega_n})^{-1} (\frac{1}{\omega_n})^{-1} (\frac{\alpha}{\omega_n})^{-1} = \frac{1}{\omega_n} (\frac{1}{\omega_n})^{-1} (\frac{1}{\omega_n}$

$$(7-1-1)\alpha-1=\overline{\omega_{\alpha}^{\prime}-(\omega_{\alpha}^{\prime})\omega_{\alpha}^{\prime}}$$

مشال:

بالرجوع إلى بيانــات التمرين التــوضيحي ٢ في الفصل الأول من هــذا البـاب،

وإذا كان المطلوب تكوين فترة ثقة 80, • للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع إذا علم أن $w_1 = \pi$ ، $w_2 = 0$ فإن $w_3 = \pi$. $w_4 = \pi$. $w_5 = \pi$. $w_6 = \pi$. $w_7 = \pi$. w_7

LEAT . M M M MM . -

وبالتعويض في (۱۰۶ ـ ۲ ـ ۲) نجد أن ح (۸۲٫۸٤۱۸ < ت (صُم) < ۱۲۵۲٫۸۶۱۸) = ۰٫۹۰

ثالثاً: فترات ثقة مشتركة Joint Confidence Interval لمعالم النموذج الخطى العام

تستخدم طريقة بونفيرني Bonterroni Method لإيجاد فترات ثقة مشتركة لممالم النموذج الخطي العام (بما فيه النموذج الخطي البسيط).

في حالة النموذج الخطي البسيط (٢٤ ـ ٣ ـ ٦)) فبإن فترات الثقة المشتركة هي :

$$\hat{\sigma}^* = 1 - \hat{\sigma}^* = 1 - \hat{$$

فإذا رجعنا إلى بيانات التصرين التوضيحي ١ في الفصل الأول من هذا الباب وأردنا تكوير، فترات ثقة مشتركة ٩٠، ٥ فإن

وذلك من الجدول رقم (٥)

•,
$$rola = \sqrt{\frac{rr}{r}} = rlor$$

$$\hat{\nabla}_{\mathcal{O}} = \sqrt{\gamma \gamma_{\mathcal{F}}} \cdot \frac{1}{\gamma_{\mathcal{F}}} + \frac{1}{\gamma_{\mathcal{F}}} \cdot \frac{1}{\gamma_{\mathcal{F}}} = 0374,$$

أي أن

أما في حالـة النموذج الخـطي العام (معـادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٦)) فـإن فترات الثقـة المشتركة هي

$$(7-7-7)$$
 $(7-7-7)$

حيث ت* = ن_{1- ب}يم_{××، د-}ر ، و عدد معالم النموذج،م عدد المعالم التي نريد أن نكوّن لها فترات ثقة مشتركة.

وبالرجوع إلى بيانات التمرين التوضيحي ٧، وإذا كان المطلوب تكوين فـترات ثقة مشتركة للممالم

أسئلة وتمارين (٦)

(۱ ـ ۱) إذا كانت س، س، س، س، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة من مجتمم توقعه
$$\mu$$
 وتباينه ν وعرفنا المقدّرات التالية:

$$\mu_{i}=\frac{1}{\mu}$$
 (m) + my + my)
$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}$$

$$\mu_{\gamma} = 1$$
, $m_{\gamma} + 1$, $m_{\gamma} + \dots + 1$; m_{ζ}

 μ مقدرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع μ ، مقدرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع μ

(۲ - ۲) إذا كانت س، 6 س، 6 س، 6 س، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع منتظم بدالة كثافة احتال:

$$\theta \ge \infty = \frac{1}{\theta} = \theta \ge 0$$

= صفر فيها عدا ذلك

أثبت أن:

θ , = ۲ س مقدّر غير متحيز للمعلمة θ.

وإذا علم أن دالة كثالة الاحتمال للقيمة الكبرى في العينة (سرن) هي:

$$\theta \ge 0$$
 صفر $0 = 0$ صفر الله عبد ا

أثبت أن:

$$\hat{\theta}_{v} = \frac{v + i}{v}$$
س(ن) مقلّر غير متحيز للمعلمة θ .

إذا كانت س 6 س 6 س 6 س عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة
$$\tau$$
 عثارة من مجتمع معتاد توقعه t وتباينه t اثن:

$$\frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1}$$

^۲(س، - س،) الم

غير متحيزين للمعلمة ٥٤، ثم أوجد كفاءة ٢٨، بالنسبة إلى ٧٥٠.

(٥-٦) إذا كانت س 6 س 6 س 6 . . . 6 س عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع له دالة كثافة احتال:

$$= (m \cdot \theta) = \frac{\gamma}{\theta} = e^{-\eta \cdot \theta}$$
 صفر

= صفر فيها عدا ذلك

أثبت أن عن سر مقدراً كافياً للمعلمة θ.

(٦ - ٦) إذا كانت س، ٤ س، ٤ . . . ٤ س، عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع بواسوني، أثبت أن مجد سر مقداراً كافياً

لمعلمة هذا التوزيع، ثم أثبت أن هذا المقدّر غير متحيز.

(٧- ٦) إذا كنانت س، 6 س، 6 . . . 6 سن عينة عشوائية من المشاهدات المساهدات ا

المستقلة غتارة من مجتمع له دالة كثافة احتبال:heta = heta = heta = heta صفر heta = heta

فيا عدا ذلك

= صفر <u>عن</u>س البت أن س = را الب البت أن س = الب

مقداراً متسقا لـ $\frac{\theta}{1+\theta}$.

(۱-۸) إذا كانت س، 6 س، 6 ٠٠٠ 6 سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة غتارة من مجتمع معتاد توقعه على وتباينه ٢٥٠ 6 ص، 6 ص، 6 - ٢٩٣. . . صين عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع آخر معتاد توقعه μ_{ν} وتباينه σ^{ν} وإذا علم أن $\sigma = \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}$ أثبت أن:

مقدراً منسقا للمعلمة ٥٠.

إذا كانت س، ، س، ، ... سن عينة عشوائية من المساهدات (7-4)المستقلة مأخوذة من مجتمع ذي الحدين بمدالة كشافة احتمال تعتمد عملي المعلمة ح، أوجد مقدراً للمعلمة ح بطريقة العزوم.

(١٠١ - ٦) إذا كانت س 6 ص 6 . . . ص عينة عشوائية من المساهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتيال:

$$\theta > 0$$
 صفر $\theta > 0$ صفر عدا ذلك

أوجد مقدِّر الامكان الأكبر للمعلمة θ.

إذا كانت س 6 س 6 6 س عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

أوجد مقدّر الأمكان الأكبر للمعلمة θ .

(٦- ١٢) إذا كانت س 6 س 6 س 5 . . . 6 س عينة من المساهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتيال:

أوجد مقدّري العزوم والامكان الأكبر للمعلمة 0، ثم أثبت أن مِن س مقلر كاف لهذه المعلمة.

(١٣ - ٦) إذا كان المتغيران س 6 ص يرتبطان بالعلاقة الخطية التالية: ص = أس + ب + خ

حيث خ خطأ عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين ٢٥ - 397 -

(كمية غير معلومة)، أوجمد مقدر الامكان الأكبر لكل من أ، ب، σ، ثم يين ما إذا كانت هذه المقدّرات متحيزة أو غير متحيزة.

إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع ص وعـند من المتغيرات المستقلة

س، ك س، ك . . . ك س على النحو التالي:

ص = أ، س، + أ، س، + . . . + أرس، + خ

حيث خ خطأ عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين v (كمية غير معلومة)، بين كيف يمكن إيجاد مقدّرات الإمكان الأكبر

لثوابت النموذج أ، ك أم ك . . . ك أو والتباين $^{\text{V}\sigma}$.

(١٥ ـ ٦) إذا كان المتغيران س 6 ص يرتبطان بالعلاقة المحددة بالنموذج:

ص = أ س + ب + خ، حيث خطأ عشوائي تـوقعه صفـر وتبـاينـه ⁷٥ (كمية غير معلومة) وكان لدينا أزواج القيم :

ص	س
1	1
۲	٣
٤	٤
٤	٦
٥	٨
٧	4
A	11
4	1.8

المطلبوب:

- ١ ـ تقدير ثوابت النموذج أ، ب
- ٢ حساب متوسط مجموع مربعات الأخطاء (MSE) وبيان ما إذا كان
 MSE مقدراً غير متحيز للمعلمة ⁷ أم لا.
- ٣ حساب كمل من التضاوت الكملي والتضاوت غير المفسّر والتضاوت
 المفسّر والتحقق حسابياً من صحة العلاقة (٤٥ ٢ ٢).
 - ٤ ـ تقدير تباين كل من مقلري أ، ب.

(۱- ۲) إذا كمان المتغيران س، ص يسرتبطان بالمملاقة ص = أ س + ب + خ حيث خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه ۲۵ (غير معلوم)، وأخذنا عمل هذين المتغيرين عينة عشوائية من أزواج القيم (سر ٤ صر) حجمها ۲۰ مفردة. فإذا حصلنا من هذه العينة على النتائج التالية:

YY = 0 $\Rightarrow -\infty$ $\Rightarrow -\infty$

مجـ (س -- س) (ص -- ص) = ١٠٦ والمطلوب:

١ ـ تقدر المعلمتين أ، ب

٢٠ ـ حساب كمل من التضاوت الكملي والتضاوت المفسّر والتضاوت غمير

المفسر. ٣- تقدير التباين σ.

٤ ـ تقدير تباين كل من مقدّري أ، ب.

(١٧ - ٦) إذا علم أن العلاقة بين الأجر الشهري بالدينار (ص) في مؤسسة معينة ومدة الخدمة بالسنوات (س) في هذه المؤسسة هي خطية بسيطة واخترنا عشوائياً عشرة أشخاص من العاملين في هذه المؤسسة، وحصلنا من العينة على التنائج التالية:

٥٠ = سجـ س عـ ٥٠ = ١٥٠ = ١٥٠ = ١٥٠ = ١٥٠ = ٢١٠ = ٢٣١٠ = ٢٣١٠ = ٩٧٤ =

والمطلسوب:

١ ـ تقدير ثوابت وتباين النموذج.

حساب كـل من التضاوت الكـلي والتضاوت المفسر والتضاوت غـبر
 المفسر

٣ ـ تقدير تباين كل من مقدّري ثابتي النموذج.

(١٨ - ٦) الجلول التالي يعطي ١٢ قيمة للمتغير التابع ص والمتغير المستقل س:

ص: ۱۰۳ ۷۵ ۱۷۲ ۲۲۲ ۲۵۰ ۲۵۱ ۲۵۰ ۲۵۹ ۲۲۳ ۱۲۸

س: . ۷ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۶ ۲۰ ۳۰ ۲۵ ۱۸ ۱۸ ۲۰ ۳ والمطلوب:

١ - توفيق غوذج خطى بسيط للبيانات المعطاة.

٢ ـ تقدير قيمة ص إذا علم أن س = ٢٢ .

٣ ـ تقدير تباين النموذج الموفّق

٤ - تقدير تباين كل من مقدّري ثابتي النموذج.

(٦ - ١٩) يعتقد بأن العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س،، س،
 هي على النحو التالى:

ص = ا. + ۱، س، + ا، س، + خ

حيث خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه 🗗 (غير معلوم).

فإذا حصلنا من عينة عشوائية حجمها ١٢ قراءة على المعلومات التالية:

ص: ١٤ ٢١ ٢٥ ١٥ ٥٨ ٧٧ ٥٨ ١٥ ١٥ ١٥ ١٦ ٨٦

mg: Vo Po P3 YF 10 00 03 Y0 Y3 1F Vo

س: ۸ ۱۲ ۲ ۱۰ ۹ ۱۰ ۷ ۱۰ ۲ ۲۱ ۹

أثبت بـاستخدام المصفوفات أن النموذج الخطي العـام المقدّر هـو على الشكل التالى:

س = ۲,۹۰۹ + ۵۵۸٬۰ س + ۲۰۹۱ س

ثم أوجمد كلا من التفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفـاوت غير المفسر وقدّر التباين °7 .

(٢٠ - ٦) إذا علم أن خط انحدار ص على س المقدّر بطريقة المربعات الصغرى

_ Y4Y_

هو: ص = ۲۵,۸۲ س + ۲۸,۵۲۲

عل ۱۹۰۰ مل ۲۰۰۰ ذا علمأن

جـ س =
$$^{\circ}$$
 مجـ س
 $^{\circ}$ $^{\circ}$

احسب متوسط مجموع مربعات الأخطاء، ثم قدّر تباين كل من مقـدّري ثابتي النموذج.

(٢١ - ٦) في دراسة لمعرفة العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س. ٤
 ح. بع حصلنا على السانات التالية :

س٠	س١	ص
۲	٤	3.5
7	٤	A1
۲	7	٧٢
٦	1	41
۲	A	۸۳
٦	٨	47

فياذا افترضنا النموذج الخطي العام بخطأ عشوائي معتاد توقعه صغر وتباينه $\nabla \alpha$ (غير معلومة)، استخدم طريقة المصفوفات لتقدير معالم هذا النموذج والتباين $\nabla \alpha$. أوجد متجه الأخطاء أو البواقي Residuals، ثم احسب كلا من التفاوت الكلى والتفاوت غير المفسر والتفاوت المفسر.

(٢٧ - ٦) إذا كانت لدينا البيانات عن عدد سيارات التكسي (س) التي تعمل في أحد المكاتب والأجور المتحصلة (ص) بالمئة دينار لكل عدد:

الأجور المتحصلة (ص)	عدد السيارات (س)	
٥٠	1	
7.	۲	
70	۴	
٧o	٤	
A*	٥	
۸۳	r	
ra.	V	
wa .		

والمطلوب توفيق النموذج الخطي البسيط للبيانات السابقة وحساب متجه الأخسطاء أو البـواقى Residuals والتفساوت الكــلي والتفـــاوت الممسرّ والتفاوت غير المفسرّ ثم تقدير تباين النموذج

(٦- ٢٣) البيانات في الجدول التالي تبين حجم المبيعات الاسبوعية (ص) بالألف دينار في السوق التجاري وعدد الأسواق التجارية (س،) وعدد السكان (س،) في عشم مدن:

	,	Q (10
س۲	۳	<u></u>
10	4	۲
. 40	۳	,
۳.	٣	۲
٦.	٤	0
40	1	1
14	*	1
٧	١	
٤٠	۳	٣
٥٥	٥	٤

والمطلوب توفيق النموذج الخطي العام للبيانات السابقة وحساب قيمة الاخطاء أو البواقي والتفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسّر وتقدير تباين النموذج.

(٦- ٢٤) اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٣١ أسرة من بين الأسر التي تسكن في منطقة معينة وقد تبين أن التوزيع التكواري للدخول الشهرية للأسر في العينة كيا يلي:

الشهري بالدينار	فئات الدخل عدد الأسر
1.	A 1
19	44
3.5	£ • • _ \mathcal{T} • •
14	0 * * - \$ * *
11	70
171	المجموع

- 144 -

والمطلوب

ا بجاد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط الدخل الشهري للأسرة في هذه المنطقة
 ٢ ـ ايجاد فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة الأسر في هذه المنطقة والتي يقل دخلها
 الشهرى عن ٣٠٠ دينار.

(٦-٢٥) لتقدير متوسط وزن الطفل عند الولادة أخذت عينة عشوائية من ١٦ طفل فكان متوسط الوزن لهذه العينة ٣ كذم. فإذا علم من خبرة سابقة أن الإنحراف المعياري لوزن الطفل عند الولادة هو ٥,٥ كذم، قلد متوسط وزن الطفل عند الولادة بفترتي ثقة ٩٥٪، ٩٩٪.

(٢- ٢) في إحدى الدراسات المدانية اختيرت عينة عشوائية طبقية متناسبة من الأسر التي تسكن في مدينة معينة وذلك بحيث يتناسب حجم العينة المختارة من كل حي مع عدد أسر الحي وحجم العينة يساوي ١٪ من حجم المجتمع وقد حصلنا من هذه الدراسة على المعلومات المبينة في الجدول التالي:

مجموع مربعات انحرافات	بجموح الدخول	حدد الأسر	عدد الأسر	الحي
الدخول الشهرية عن	الشهرية للأسر	في المينة من	قي الحي	
عن بتوسط هيئة الحي	بالدينار	کل حي		
337/	4	Yo	70	1
1.01	794.	٥V	ov••	4
				باقي
27V00	177.	114	174**	الأحياء (٣)
14718	1770-	40.	70	المجموع

إذا.افترضت أن توزيع الدخل، في كل من أحياء المدينة، يتبع التـوزيع الطبيعي بتوقع لمبر وتباين σ ((ر = 1 ۲ ۲ ۵ ۳):

١ - اعتباداً على بيانات الحي الأول فقط، أوجمد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط
 دخل الأسرة في ذلك الحي.

٢ - اعتباداً على بيانات الحي الثاني فقط، أوجد فـترة ثقة ٩٥٪ لمتــوسط
 دخل الأسرة في ذلك الحي.

٣- اعتباداً على بيانات جميع الأحياء، أوجد فترة ثقة ٩٩٪ لمتوسط دخل
 الأسرة في هذه المدينة.

٤ - بافتراض أن تباين دخول الاسر، في كل من الحي الاول والحي الثاني متساو، أوجمد أفضل تقدير لهذا التباين مستخدماً بيانات الحي الاول والشاني، ثم أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين متوسط دخل الاسرة في الحي الاول (١٤٨) ومتوسط دخل الاسرة في الحي الثاني (١٤٨)

(٢- ٢٧) اخذت عينة عشوائية بسيطة مكونة من ١٣١ عامل في مصنع كبير وحسب إنتاج العامل في العينة عند استخدامه طريقة انتاجية معينة، فوجد أن توزيع الإنتاج كما يلى:

عدد العال	لئات الإنتاج اليومي بالقطعة
4	£A _ &*
**	43 _ FA
0 A	70-37
*1	37.78
1.	A* - YY
171	المجموع

والمطلوب

أولًا من بيـانات العينـة السابقـة، أوجـد فـترة ثقـة ٩٥٪ لمتــوسط الانتاج اليومي للعامل في المصنع باستخدام الطريقة الإنتاجية السابقة.

ثانياً سجلت بيانات عن إنتاج عيال نفس العينة عند استخدامهم طريقة انتاجة ثانية وحسبت من هذه البيانات المقايس الإحصائية التالية: الموسط الحسابي للإنتاج اليومي للعامل في العينة بالطريقة الثانية = ٣٠,٢ قطعة.

تباين الإنتاج اليومي للعامل في العينة بالطريقة الثانية = ٥٧ (قطعة)*

وجد

أفضل تقدير لتباين الإنساج اليومي للعمامل من بيمانات العيندين
 بافتراض أن تباين الانتاج في مجتمع الدراسة لا يتغير بماستخدام
 العامل لأى من الطريقتين.

٢ - فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين متوسط الانتاج اليومي للعامل في المصنع عند استخدامه للطريقة الثانية وبين متوسط الإنتاج اليومي للعامل في المصنع عند استخدامه للطريقة الأولى بافتراض عدم تأثير انتاج العامل بطريقة معينة على انتاجه بالطريقة الأخرى.

(٦- ٢٨) اختارت شركة لتجميع أجهزة التلفزيون عينة عشوائية من شاشات التلفزيون حجمها ٢٥ وحدة فوجدت أن متوسط الخدمة لهذه العينة هو ١٢٠٠ ساعة، فإذا كان تباين مدة الخدمة لهذا النوع من الشاشات هو ١٦٠٠ (ساعة)، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط خدمة شاشات التلفزيون.

μ اذا كان طول الطالب في الجامعة الأردنية يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين ۲٥، وهما غير معلومتين، وأخترنا عينة عشوائية حجمها ٢٥ من طلاب الجامعة وكانت أطوالهم كها هو مين في الجدول التكراري التالي:

عدد الطلاب	طول الطالب بالسنتمتر
1	- 10 •
٣	- 100
٤	-17.
٦	-170
٥	- 14.
٤	- 140
۲	140 - 14.
70	المجموع

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط طول الطالب في الجامعة الأردنية.

(٣٠ ـ ٦) حدد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الأجر السنوي في مؤسسة معينة

- في حدود ± ٢٠٠ دينار بدرجة ثقة ٩٥٪ إذا علم أن الانحراف الممياري للأجر السنوي للعامل الواحد في هذه المؤسسة هو ١٠٠٠ دينار.
- -7 7 حدّد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط عدد الركاب في الرحلة الواحدة الذين تنقلهم شركة للباصات في حدود \pm 7 مسافر بدرجة ثقة -70 علم من الرحلات السابقة أن الانحراف المياري يساوي -71 مسافرين لكل رحلة
- إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها ١٠٠ شخص من منطقة ما ووجدنا أن
 ٦٢٪ منهم يوافقون على رأي معين، أحسب فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة
 الأشخاص الذين يوافقون على هذا الرأي في المنطقة المذكورة.
- (٦-٢٣) في مسح لاتجاهات المستهلكين ورغباتهم في بلد معين، أخلت عينة عشوائية حجمها ١٥٠ شخصاً ووجد أن من بينهم ٣٠ شخصاً يرغبون في شراء ميارة من نوع معين، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة الأشخاص الذي يرغبون في شراء هذا النوع من السيارات في البلد المذكور.
- (٣٤-٦) إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص من الذين أعبارهم ١٨-٦٥ سنة في مدينة ما ووجدنا أن ٢٠٪ منهم أميّين، قـقر نسبة الأميّن في هذه المدينة بفترة ثقة ٩٩٪.
- (٦-٣٥) إذا كان عدد المدخنين في عينة عشوائية حجمها ٣٢٠ من طلاب المدارس الثانوية هو ٨٠ وعدد المدخنين في عينة عشوائية حجمها ٣٠٠ من طلاب الجامعة الأردنية هو ١٥٠، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين نسبة المدخنين في المرحلة الثانوية ونسبة المدخنين في الجامعة الأردنية.
- (٣٦-٢) إذا أرادت وزارة العمل والتنمية الإجتهاعية تقدير نسبة العاطلين عن العمل في المملكة في حدود ± ٢٠٠، بدرجة ثقة ٩٥٪، فها هو حجم العينة الملازم لتحقيق ذلك إذا كان من المتفق عليه في الوزارة أن هذه النسبة حوالي ٢٠،٠٩
- (٣٧-٦) إذا فرضنا أن نسبة المستهلكين الذين يفضلون نوعاً معيناً من الأسهاك تقع بين ٢٠,٠٠ و ٢٠,٠٠، حقد حجم العينة اللازم لتقدير هذه النسبة في حدود ± ٢٠,٠٤ بدرجة ثقة ٩٠,٠٠

(٦-٣٨) اختيرت عينة عشوائية عدد مفرداتها ٢٥ أسرة من بين الأسر التي تقطن
 في مدينة معينة، وقد تبين أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية لأسر
 هذه العينة كما يل:

عدد الأسر	نثات الدخل الشهري بالدينار
Y	71
٧	*** = ***
11	8 4
٤	0 * * - \$ * *
١	7 0
40	المجموع

فإذا علم أن الدخـل الشهري لـلأسرة الواحـدة يتبع التـوزيع الـطبيعي بتوقع 4 وبتاين 7° حيث ۴ ° 6 كغر معلومتين، أوجد

 ١ فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط الدخيل الشهري لبلاسرة الواحدة في هذه المدينة

٢ ـ فترة ثقة ٩٩٪ لتباين الدخل في هذه المدينة

- (٣٩-٦) إذا كانت أعار خسة من أعضاء هيثة التدريس في كلية معينة هي ٣٩، ٥٥ ، ٦٠ ، ٥٥، ٤٤، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لتباين الأعار لجميع أعضاء هيثة التدريس في هذه الكلية إذا علم أن الأعار تتبع التوزيع الطبيعي .
- (٠٠ ـ ٦) إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٢١ من المهندسين العاملين لدى شركة معينة، احسب فترة ثقة ٩٠٪ لتباين عدد ساعات العمل الأسبوعي لجميع المهندسين إذا علم أن الإنحراف المعياري لعدد ساعات العمل الأسبوعي هو ٨ ساعات وأن عدد ساعات العمل يتبع التوزيع الطبيعي.
- (٤١ ـ ٦) الجدول المزدوج التالي يبين توزيع ٥٠ طالباً من طـلاب الجامعــة الاردنية حسب الطول بالسنتمتر (ص) والوزن بالكيلوغرام (ص):

الوزن (ص) الطول (س)	- 01	- 20	-7.	- 7.0	- ٧٠	- Ve	V0 - V-	٨ المجموع
- 100	١		Ψ.					۳
-17.	1	۳	۳		1			v
- 175	- 1	۲	A	3	1			17
- 17+			1	1"	٤	*		1.
- 170				۳	4	٤		A
fA0 - 1A+						١	٤	•
الجموع	٣	٤	18	١٠	A	٧	٤	0.

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمعامل الارتباط بين الطول والوزن

- (٣ ـ ٣٦] إذا وجد أن معامل ارتباط بيرسون بين العمر (س) وضغط المدم (ص) لعينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص هـو ٠٨،٠، أوجد فـترة ثقة ٩٩٪ لعامل الارتباط (م) بين العمر وضغط الدم.
- (٣٠ ـ ٦) إذا وجد أن معامل ارتباط بيرسون بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والمرقم القياسي لأسعار الجملة لمجموعة من السلع خلال السنوات 1970 ـ 1978 هو ٩٠٠، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمسامل الارتباط بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار الجملة.
 - (٢ ـ ٤٤) بالإشارة إلى بيانات التمرين (١٥ ـ ٦)، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لكل من أ 6 ب
 - (20 17) بالإشارة إلى بيانات التمرين (17 17)، أوجد فترة ثقة ٩٩٪ لكل من أ ك ب
 - (٦-٤٦) بالرجوع إلى تمرين (١٧-٦)، أوجد فترة ثقة ٩٠٪ لكل من أ ٤ ب
- (4 7) استخدم بيانات التمرين (٢١ ٦) في ايجاد فترة ثقة ٩٩٪ لكل من أ. ٤
 أ، ٤ أ, ٤ ثم أوجد فترة ثقة مشتركة ٩٠٪ للمعلمتين أ. ٤ أ.



الباب السابع

اختبار الفروض Hypothesis Testing

الاختبارات الإحصائية تقسم إلى

 ۱ - اختبارات معلمية Parametric Tests حيث أن توزيع المشاهدات له شكل معين ومعروف.

 ۲_ اختبارات غیر معلمیة Non-Parametric Tests حیث أن توزیع المشاهدات غیر معروف.

الفصل الأول

الاختبارات المعلمية

(۱ ـ ۱ ـ ۷) مقدمة

لقد درسنا في الباب السادس طرق تقدير معلمة (أو معالم) مجتمع معين من بيانات عينة عشوائية سواء منها التقدير بنقطة أو التقدير بفسترة ثقة. ونركز اهتهامنا في مدا الباب على معرفة ما إذا كانت قيمة مفترضة لمعلمة المجتمع مقبولة أم لا في ضوء مصوعة من المشاهدات Observations أو دليل العينة Sample Evidence المشتق من هذه المشاهدات، وبعبارة أخرى فإننا نختبر صحة إدعاء يتعلق بمعلمة أو معالم المجتمع وذلك بالاعتهاد على بيانات العينة العشوائية.

ويجب التمييز في هذا المجال بين الفرضيات الإحصائية والفرضيات العلمية بشكل عام، حيث أن الفرضيات الإحصائية تتعلق بالمتغيرات العشوائية التي يمكن مشاهدتها. فإذا فرضنا مثلاً أن متوسط مجتمع معتاد M=0.0, أو أن نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج مصنع معين M=0.0, أو أن تباين مجتمع معتاد M=0.0 فرضيات إحصائية تتضمن بعض خصائص فراغ المعاينة يمكن ترجمتها إلى فرضيات تتعلق بهذا الفراغ واختبار صحتها بمقارنة القيم المحددة في هذه الفرضيات بدليل العينة المشتق من مجموعة المشاهدات المختارة من مجتمع الدراسة.

(٧ - ١ - ٢) الفرض المدمي والفرض البديل -Null Hypothesis and Alter native Hypothesis

في كمل اختبار تجريه يموجد فرضان: الفرض العدمي ونومز لـه بالرمز Hه
 والفرض البديل ونومز له بالرمز H₁. فإذا كان:

Ho: 4 = 00

o• ≠ μ : ιH

فإن الفرض العدمي يعني أن متوسط مجتمع معين يساوي ٥٠ والفرض البديل يعني أن متوسط المجتمع لا يساوي ٥٠.

وإذا كان

•,•Y≥p:₀H

., . Y < p : ,H

فإن الفرض العدمي يعني أن نسبة للفردات التي تحمل صفية معينة في مجتمع ما أقـل من أو تساوي ٢٠,٠ والفرض البديل يعني أن هذه النسبة أكبر من ٢٠,٠

وفي كثير من الأحيان نستخدم كلمة الفرض للدلالة على الفرض العدمي.

(٢-١-٣) الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني Type I Error and Type II Error

إننا نستخدم دليل العينة Sample Evidence لاختبار صحة الفرض العدمي ، وحيث أن العينة جزء من كل فإن هناك امكانية رفض الفرض العدمي عندما يكون صحيحاً وأيضاً إمكانية قبوله عندما يكون خاطئاً . فعندما نرفض True الفرض مع أنه صحيح Type I Error فإننا نقع في خطأ من النوع الأول Type و Type القرض مع أنه خاطىء False فإننا نقع في خطأ من النوع الثاني Type II Error ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{\alpha}$ وتلفظ بيتا. وقد جرت العادة على من النوع الثاني Type II Error ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{\alpha}$ وتلفظ بيتا. وقد جرت العادة على النوع الأول Probability of Type I Error أو مستوى المختية Probability of باحتال الخطأ من النوع الأول Type II Error

ويمكن تلخيص نتائج اختبار فرض معين في جدول على النحو التالي:

 State of Nature
 حالة الطبيعة

 الفرض العدمي صحيح
 الفرض العدمي صحيح

 القرار
 قرار صحيح

 خطأ من النوع الثاني

 Decision

 رفض الفرض العدمي خطأ من النوع الأول

 قرار صحيح

رعدم قبوله) α (عدم قبوله) ونىرغب في جميع الأحوال أن نجعل كلًا من eta أقل ما يمكن، ولكن في حالة ثبات حجم العينة فإن أي انخفاض في قيمة أحد الاحتيالين يؤدي إلى ارتفاع في قيمة الآخر ولا يمكن تقليل الاحتيالين معاً إلّا بزيادة حجم العينة.

(٤ - ١ - ٧) كيفية إجراء الاختبار باستخدام الدالة الاختبارية:

مناطق القبول والرفض Acceptance and Regection Regions

Decision Rule

إن إجراء أي اختبار باستخدام الدالة الاختبارية يتم حسب الخطوات التالية:

١ ـ صياغة الفرضين العدمي والبديل وذلك على النحو التالي:

أ ـ اختبارات ذات طرفين Two-Tailed Tests

 $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$

(V-1-1) $0 \neq \theta$:

ب_ اختبارات ذات طرف واحد One-Tailed Tests

 $H_0: \theta \leq \theta_0$

 $(V-1-Y) \qquad \qquad 0\theta < \theta : {}_{1}H$

ويسمى اختبار الطرف العلوي Upper-Tailed Test

 $\theta \geq \theta_0$

 $H_t: \boldsymbol{\theta} < \boldsymbol{\theta}_0$

ويسمى اختيار الطرف السفل Lower-Tailed Test

γ - تحديد مستوى المعنوية α حيث يمكن أن تكون α أية قيمة في المدى (صفر، ۱) ولكن القيم التي تستخدم غالباً في الفرضيات الإحصائية هي α = α . • = α

 $\hat{m{ heta}}$ وليكن Unbiased Estimator وليكن Unbiased Estimator وليكن $\hat{m{ heta}}$

٤- تحديد الدالة الاختبارية Test Statistic التي تستخدم في اختبار الفرض،
 وتعرف هذه الدالة بشكل عام، على النحو التالى:

الدالة الاختبارية= المقدّر - القيمة المتوقعة للمقدّر (٤ - ١ - ٧)

٥- تحديد توزيع المعاينة للدالة الاختبارية

- ٢_ التعويض في الدالة الإختبارية بقيمة المقياس الإحصائي المحسوب من بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع الدراسة وقيمة الإنحراف المعياري (معروفة لدى الباحث من خبرة سابقة أو مقدرة من بيانات العينة) والقيمة المتوقعة للمقياس الإحصائي تحت الفرض العدمي.
- α استخراج قيمة من جدول توزيع المعاينة المحدد في خطوة ٥ وبمستوى معنوية α المحدد في خطوة ٢ .
- ٨ تحديد منطقتي القبول والرفض وبالتالي قبول الفرض أو عدم قبوله بناء على
 المقارنة بين القيمة المحسوبة في الخطوة ٦ والقيمة الجدولية المستخرجة في خطوة
 ٧

ونوضّع الخطوات السابقة بالمثال التالي:

إذا كان سعر سلمة ما في أحد الأسواق خلال يوم معين يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع μ (كمية غير معلومة) وتباين 7 يساوي 7 (دينار) (معلومة من خبرة سابقة) وأخذنا عينة عشوائية حجمها 7 من جميع الوحدات التي بيعت خلال ذلك اليوم وحصلنا منها على البيانات المبوبة في الجدول التالي:

عدد الوحدات	سعر الوحدة بالدينار
1	۳۲
Y	77
1.	٣٤
0	40
<u> </u>	77
40	المجموع

المطلوب هو:

أ ـ اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحمة المباعة في ذلك اليـوم هو ٣٤,٥٥
 دينار

بـ اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحدة المباعة في ذلك اليـوم أقل من أو
 يساوى ٣٣,٥٥ دينار.

جــ اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحدة المباعـة في ذلك اليـوم أكبر من أو ساوى ٣٤,٥ عنار.

الحل

١ - يمكن صياغة الفرض في أكما هـو مبين في (١ - ١ - ٧)، والفرض في ب كما هـو
 مبين في (٢ - ١ - ٧)، والفرض في جـ كما هـو مبين في (٣ - ١ - ٧).

۲ ـ أفرض أن مستوى المعنوية α = ۰,۰٥

٣ المقياس الإحصائي المناسب لتقدير متوسط مجتمع معتاد # هوالوسط الحسابي
 للعينة س ويحسب على النحو التالى:

سعر الوحدة × عدد الوحدات	عدد الوحدات	سعر الوحدة
**	١	4.4
777	٧	**
٣٤٠	1.	37
140	٥	20
<u> </u>	<u> </u>	٣٦
A0 °	40	المجموع
	4.8 = Yo.	- = :

٤ ـ بالرجوع إلى (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن الدالة الاختبارية تعرف كها يلي:

٥ - إن توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي س هو معتاد توقعه 4 وتباينه ن ن ريانه

وبالتالي فإن توزيع المعاينة للدالة الإختبارية هو معتاد قيـاسي (معتاد تـوقعه صفـر وتباینه ۱)

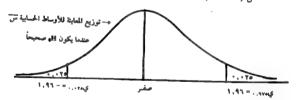
1.720 - =

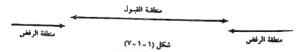
1.1V-=

٧_ القيم الجدولية من جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) هي

في حالة الاختبار ذي الطرفين = - ۱,۹٦ ، ي،۷۶، ، = ۱,۹٦ = في حالة اختبار الطرف العلوي 1,720 = ي ۱۹۰۰۰ في حالة اختبار الطرف السفلي

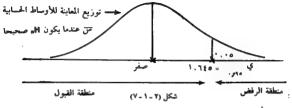
ی،۰۰۷ ٨_ في حالة الاختبار ذي الطرفين فإن مناطق القبول والسرفض تحدد كما هو مبين في الشكل (١ - ١ - ٧)





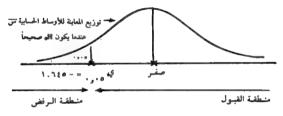
وحيث أن | -17, 1 | < 1,97 فإننا نقبل الفرض

وفي حالة اختبار الطرف العلوي فإن مناطق القبول والرفض تحـدد كما هــو مبين في الشكل (٢ ـ ١ ـ ٧)



وحيث أن ١,٦٤٥ < ١,٦٧ فإننا نرفض الفرض.

وفي حالة اختبار الطرف السفلي فإن مناطق القبول والـرفض تحدّد كـها هو مبـينّ في الشكل (٣- ١ ـ ٧).



شکل (۲-۱-۷)

وحيث أن – ١,٦٧ < – ١,٦٤٥ فإننا نرفض الفرض

Power of the Test الاختبار (٥- ١- ٥) قوة الاختبار

منحني قوة الاختبار Power of the Test Curve

Operation Characteristic Curve

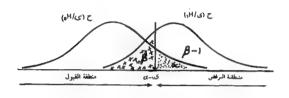
(OC)

إن قــوة الإختبار عبــارة عن احتمال رفض الفــرض العــدمي ٥٦ عنــدمــا يكـــون الفرض البديل ٦١ صحيحاً، أي أن

وبالتالي فإن قوة الإختبار تعبّر عن قوة الفرض البديل H

فإذا اعتبرنا اختبار متــوسط مجتمع معتــاد، فإنــه يمكن تبيان كيفيــة حساب قــوة الإختبار ورسم كل من منحنى قوة الإختبار ومنحنى عميّر الفاعلية في الحالات التالية: أو لا : اختــاد الطرف العلمــى

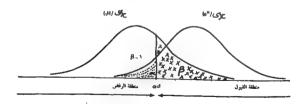
بالإشارة إلى الفرض المحدد في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٧) فبإننا نحدد قيمة كمل من الخطأ من النوع الثاني ثم وقوة الإختبار ١ ـ ـ ٤ كما هو مبينٌ في الشكل (٤ ـ ١ ـ ٧):



شكل (٤ ـ ١ ـ ٧)

ثانياً: اختبار الطرف السفلي

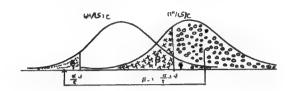
بالإشارة إلى الفرض المحدّد في المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٧) فبإننا نحـدّد قيمة كـل من الحفظ من النوع الثاني 6 وقوة الإختبار ١ ـ 6 كما هو مبين في الشكل (٥ ـ ١ - ٧)



شکل (۲۱۰°) - ۳۱۵_

ثالثاً: اختمار الطرفين

بالإشارة إلى الفرض المحدّد في المعادلة (١ - ٢ - ٧) فياننا نحدّد قيمة كيار من الخطأ من النوع الثاني كم وقوة الإختبار ١ ــ كم كيا هو مبينٌ في الشكل (٦ ـ ١ ـ ٧)



شکل (۱ - ۱ - ۷)

مثال:

مصنع معينٌ يقوم بصناعة أنواع من الحبال قوة تحملها للشد تتبع التوزيع المعتاد بتوقع 4 يساوي ٢٠٠ كغم وانحراف معياري لقوة التحمل (٥) يساوي ٢٤ كغم، ويعتقد أحد المهندسين أن معالجة هذه الحبال بمادة كيميائية جديدة يزيد في قوة تحملها. فإذا أخذنا عينة من إنتاج هذا المصنع حجمها ٣٦ حبلًا بعد معالجتها بالطريقة الجديدة، اختبر صحة إدعاء هذا المهندس واحسب قـوة الإختبار وارسم كـلاً من منحنى قوة الإختبار ومنحنى عيز الفاعلية.

الحسل:

إن الاختبار الذي نريد إجراءه هو اختبار الطرف العلوى، أى أن

H : ملا خرام کیلوغرام

H: : 4 > ۲۰۰ کیلوغرام

والفرض العدمي يعني أن قـوة التحمل بعبد المعالجية أقل من أو تسـاوي قـوة التحمل قبل المعالجة أما الفرض البديل فإنه يعنى أن قوة التحمل بعد المعالجة أكبر من قوة التحمل قبل المعالجة.

وحيث أن الإنحراف المعياري للتوزيع المعتاد معلوم ويساوي ٢٤ كيلوغـرام فإن - 211 -

توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي س هو معتاد توقعه 4 وتباينه يساوي

$$0 = \frac{\gamma^{2}}{\Gamma^{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{$$

تتبع التوزيع المعتاد القياسي.

وإذا فرضنا أن مستوى المعنوية ٠,٠١ = ٥ قان

ی جدول رقم (۳) من جدول رقم (۳) وذلك من جدول رقم (۳) در در در ا

ومنها قإن

 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \overline{\mathbf{r}}$

فإذا كانت قيمة س ≤ ٢٠٩,٣٢ فإننا نقبل الفرض العدمي

وإذا كانت قيمة س ٢٠٩,٣٢ فإننا نرفض الفرض العدمي

وتحسب قيمة β وبالتالي ١ - β بفرض قيم مختلفة لقوة التحمل μ عت الفرض البديل . فإذا كانت μ : μ . μ على النحو التالى:

آن β ، كيا سبق أن أوردنا، عبيارة عن احتمال قبـول الفرض العـدمي عندمــا يكون الفرض البديل صحيحًا. أي أن

β = احتمال (قبول العملية الإنتاجية القديمة عندما تكون قوة التحمل
 ۲۱۰ كغم) وتحسب قيمة هذا الإحتمال كها هو مبين في الشكل (٧ - ١ - ٧)



Y .. Y .4 Y1 .

شکل (۷ - ۱ - ۷)

أي أن

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right) = \int_{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) d\gamma = \beta$$

., 8.14 =

وإذا كانت العملية الإنتاجية الجديدة تنتج حبالًا ذات قـوة تحمل 10، 1

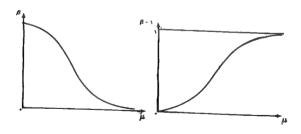
$$\frac{\beta-1}{\beta} \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1}} \qquad \frac{\beta}$$

۱۹۰ مفر ۱٬۰۰۰
$$\xi, Vo = \frac{19 \cdot - Y \cdot 9}{\frac{Y\xi}{7}}$$

$$\gamma, \gamma = \frac{\gamma + \gamma - \gamma + q}{\gamma + q}$$

•, 10AV •,
$$\frac{\gamma \cdot 0}{1}$$
 • 1, •• = $\frac{\gamma \cdot 0}{1}$ • 10AV • .

والشكلان (٨ ـ ١ ـ ٧) ، (٩ ـ ١ ـ ٧) يوضحـان منحني مميّز الفـاعلية ومنحني قوة الاختبار



شكل (٩ ـ ١ ـ ٧) منحني قوة الاختبار شكل (٨ ـ ١ ـ ٧) منحني نميز الفاهلية

(٦- ١ - ٧) اختبار الفرضيات الإحصائية باستخدام فترة الثقة.

إذا كان الاختبار ذا طرفين فإنه يمكن اجراؤه كما هو موضّع بالمثال التالي:

إذا أردن مثلًا إجراء اختبار يتعلق بقيمة متوسط مجتمع معتاد 4 سواء كان التباين معلوماً أو غير معلوم فإنها نتبع الخطوات التالية :

١ _ صياغة الفرضين العدمي والبديل كها يلي:

 $H_0: \mu = \mu_0$ (F-1-V)

 $_{0}\mu \neq \mu$: $_{1}H$:

۲ تحدید مستوی المعنویة ۲۰

٣ . تحديد أفضل مفياس أحصائي غير متحيز للمعلمة وليكن س

 $\frac{1}{2}$ - تحديد توزيع المعاينة للمقياس الاحصائي المحدد في الخطوة $\frac{1}{2}$ ، فالوسط الحسابي $\frac{1}{2}$ س مثلاً يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\frac{1}{2}$ وتباين $\frac{1}{2}$ إذا كـانت قيمة $\frac{1}{2}$ معلومة ، ويتبع توزيع ستبودنت (ت) إذا كانت قيمة $\frac{1}{2}$ غير معلومة .

٥ ـ نكوَّن فترة ثقة على النحو التالى:

$$(v-1-v) \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{\dot{c}}} < \omega < \mu_0 + \omega_0 < \omega < \omega_0$$

إذا كانت قيمة ٢٥ معلومــة

$$\mu_0 - \dot{\nu}_{-} = \frac{3}{\sqrt{V}} < \sqrt{V} + \dot{\nu}_{+} + \frac{3}{\sqrt{V}} = \frac{3}{\sqrt{V}}$$
 $(A - 1 - V)$

حيث ع الانحراف المعياري للعينة العشوائية المختارة في الخطوة التالية.

٦- نختار عينة عشوائية حجمها ن مفردة من مجتمع الدراسة ونحسب منها قيمة المقدّر س .

 ٧ - إذا كانت ثيمة س تقع ضمن الفترة (٧ - ١ - ٧) إذا كان التباين معلوماً أو ضمن الفترة (٨ - ١ - ٧) إذا كان التباين غير معلوم فإننا نقبل الفرض.

أما إذا كان الاختبار ذا طرف واحد فإننا نجريه باتباع نفس الخطوات السابقة باستثناء فترة الثقة في الخطوة ٥ فإنها تصبح كما يلي:

أولاً: في حالة اختبار الطرف العلوي المبينَ في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٧) فإن المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٧) فإن المعادمة $\frac{\sigma}{\sigma}$ إذا كانت قيمة $\frac{\sigma}{\sigma}$ معلومة

ود - ۱ - ۱۰) غير معلومة (۱ - ۱ - ۷) غير معلومة (۱ - ۱ - ۷)

وتصبح قاعدة اتخاذ القرار في الخطوة ٧، كما يلي:

إذا كنانت قيمة ص أقبل من القيمة التي تحصيل عليهما من (٩ ـ ١ ـ ٧) أو القيمة التي تحصل عليها من (١٠ ـ ١ ـ ٧)، حسب الحالة، فإننا نقبل الفرض.

ثانياً: في حالة اختبار الطرف السفلي المبينَ في المعادلة (٣ ـ ١ ـ ٧) فإن

(۲ - ۱ - ۱۱) معلومة
$$\frac{\sigma}{\sqrt[3]{V}}$$
 وذا كانت ڤيمة σ^{V} معلومة

$$\alpha_{-1} = -\frac{3}{\sqrt[3]{\nu}}$$
 إذا كانت قيمة σ^{7} غير معلومة. (١٠ - ١ - ٧)

وتصبح قاعدة اتخاذ القرار في الخطوة ٧ كما يلي:

إذا كمانت قيمة س أكبر من القيمة التي نحصل عليهما من (١١ ـ ١ ـ ٧) أو القيمة التي نحصل عليها من (١٢ ـ ١ ـ ٧)، حسب الحالة، فإننا نقبل الفرض.

Tests of a Population Mean اختبارات متوسط المجتمع (۷ - ۱ - ۷)

إذا فرضنا أن متوسط المجتمع هو μ وأن القيمة المفترضة لهذا المتوسط هي μ فإن الفرضين العلمي والبديل يمكن أن يكونا بالصورة (١ - ١ - ٧) أو بالصورة (٢ - ١ - ٧) و بالصورة (٣ - ١ - ٧)، وأفضل مقياس إحصائي لتقدير المعلمة μ هو متوسط المينة ω . ولقد سبق أن عرفنا أنه إذا كان مجتمع المراسة معتاداً بتوقع μ وتباين ∇ وكانت ∇ معلومة فيان توزيع المعاينة المعتماد ∇ غير معلوم فياننا نقدّره بتوقع μ وتباين $\sqrt{\frac{\nabla}{\sqrt{\cdot}}}$ ، أما إذا كان تباين المجتمع المعتاد ∇ غير معلوم فياننا نقدّره بنياين العينة π = $\frac{\nabla}{0}$ - $\frac{\pi}{0}$ ($\frac{\pi}{0}$) ويكون توزيع المعاينة المستخدم في هذه الحالة هو ت بدرجات حرية ($\frac{\pi}{0}$).

أما إذا كان المجتمع الأصلي غير طبيعي، فقد سبق أن عوفنا من نبطرية النزعة المركزية أنه يمكن تقريب توزيع المعاينة للمقياس الاحصائي س بالتوزيع الطبيعي كلها زاد حجم العينة (ن > ٣٠)

مثناك ١:

في إحدى الدراسات اختيرت عينة عشوائية من الأسر التي تقطن في مــدينة مــا،

فإذا كان حجم العينة يساوي 70° أسرة ومجموع المنحول الشهرية لهذه الأسر 170° 1770 دينار، وإذا علم أن توزيع المنحول في هذه المدينة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ (غير معلوم) وتباين $7^{\circ} = 70^{\circ}$ (دينار) 7° ، المختبر بمستوى معنوية 7° الفرض القائل 10° مناود.

0 · = μ : 0H

o• ≠ μ : 1H

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع 4 هــو الوسط الحســابي للعينة س ويحسب من

وباستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار:

$$\frac{\overline{w} - \overline{w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{w} - \mu}{\overline{w}}$$
 يتبع التوزيع المعتاد القياسي. σ

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$1 - = \frac{1}{1 - \frac{1}$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي جدول رقم (٣) فإن:

وبما أن قيمة ى تقع بين ي٠٠٠٠٠ 6 ي٠٠٠٠ فــاننا نقبــل الفرض (أي أن متــوسط الدخل لا يختلف معنويًا عن ٥٠ ديناراً).

مشال ۲:

اختىر صحة الفروض في الحالات التالية:

علمًا بأن مجتمع الدراسة في الحالتين يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين $^{
m V\sigma}$.

الحسل:

ثانياً

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{\mu} : \mathbf{0} + \mathbf{0}$$
 اولاً: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع 4 هو الوسط الحسابي للعينة س.

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ،) فإن المقدار:

$$\frac{\mu - \overline{\omega}}{\overline{\omega}} = \frac{(\overline{\omega})}{\overline{\omega}}$$

يتبع التوزيع المعتاد القياسي. وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$A = \frac{0 - \frac{0}{2}}{\frac{0}{\Lambda}} = \frac{1 \cdot \cdot - 90}{\frac{0}{15}} = 0$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي جدول رقم (٣) فإن:

وبما أن قيمة ي لا تقع بين ي.٠٠٠ كا ي٠٠٠٠ فايننا نـرفض الفرض (أي أن متـوسط

المجتمع يختلف معنوباً عن ١٠٠ دينار).

$$Y' \neq \mu$$
 ,H

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع هو الوسط الحسابي للعينة س

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار:

$$\frac{\mu - \overline{\omega}}{\overline{\omega}} = \frac{\overline{\omega} - \mu}{\overline{\omega}^0}$$

يتبع توزيع تبدرحاتحرية ن - ١. ويالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$\omega = \frac{\gamma \gamma - \gamma \gamma}{\frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma}}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{3}} = \lambda$$

ومن جدول توزيع ت جدول رقم (٥) فإن:

وبمــا أن قيمة ت لا تقــم بين تـ٠٠٠٥ ، ٥ ك تـ٠٠٠٥ ، ١ فــإننا نــرفض الفرض (أي أن متوسط المجتمع يختلف معنوياً عن ٣٠ قرشاً)

مثسال ۳:

أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها ٨١ مفردة من العاملين في مصنع كبير ووجد أن توزيع العمال حسب عدد القطع التي ينتجها العامل في اليوم الواحد هو على النحو التالى:

عدد العمسال	فئات الانتاج اليومي بالقطعة
4	0 * _ 8 *
۲.	70.
۳۰	* F = * Y
10	A* -Y*
Y	4 4.
Α1	الجموع

والمطلوب اختبار الفرض القائــل مأن متــوسط الانتاج اليــومي للعامــل الواحـــد

يساوي ٦٠ قطعة، وذلك بمستوى معنوية ٥٪. إذا علم أن توزيع عدد القطع التي ينتجها العامل يومياً (ليس بالضرورة طبيعياً) له توقع 4 وتباين ٢٥ (كمية محمدودة وتساوى ٣٦).

الحسل:

 $\tau \cdot = \mu$: ₀H

1°=μ: ₀H 1°≠μ: ₁H

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع علم هو الوسط الحسابي للعينة س ويحسب كما يل:

ح'×ك	الانحراف المختزل ح'	التكسرار	مركز الفثة س
14 -	Υ -	4	٤٥
Y	1 -	٧.	00
صفر	صقر	۳٠	70
10	1 +	10	٧٥
31	Y +	٧	٨٥
4 -		AT	الجموع

حيث س مركز الفئة إ

أ أي وسط فرضي (غالباً مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار)

ث طول الفئة إذا كانت أطوال الفئات متساوية

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) ونظرية النزعة المركزية فإن المقدار:

$$\frac{\overline{w} - \overline{v}}{\overline{v}} = \frac{\overline{w} - \mu}{\overline{v}}$$
يتبع التوزيع المعتاد القياسي σ

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$0, A0 = \frac{9 \times 7, 9}{7} = \frac{10 - 17, 9}{7} = 0$$

ومن جدول توزيع ي (جدول رقم (٣)) فإن:

وبما أن قيمة ى لا تقع بين ي.٠٠٠ ، ي.٩٧٥. فإننا نـرفض الفرض (أي أن متوسط الانتاج اليومي للعامل يختلف عن ٦٠ قطعة بشكل معنوي).

مثسال ٤:

تدعي شركة لانتاج الألبان بأن متوسط وزن علبة الحليب ذات السعة ٥٠٠ غم لا يقل عن ٥٠٠ غم. فإذا اخترنا عشوائياً عينة من إنساج هذه الشركة حجمها ٢٥ علبة ووجدنىا أن متوسط وزن العلبة لهذه العينة هو ٤٩٨ غم والانحراف المعياري لوزن العلبة هو ٩ غم، اختبر بجستوى معنوية ١٪ صحة ادعاء الشركة المنتجة.

الحسل:

••• ≤ μ : oH

 $\circ \cdot \cdot > \mu$: ₁H

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع ٤٤ هـو الوسط الحسابي للعينة س بـاستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار:

$$\frac{\overline{w} - \overline{v} (\overline{w})}{\sqrt[3]{v}} = \frac{\mu - \overline{w}}{\sqrt[3]{v}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{v}}$$
. present equilibrium (v - 1).

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$1, 1 - \frac{1 - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q}$$

ومن جدول توزيع ت (جدول رقم (٥)) فإن:

7, 897 - = re :

وحيث أن قيمة ت أكبر من قيمة ت٠١٠٠٠ فإنسا نقبل الفرض القائمل مأن متوسط وزن علبة الحليب لا يقل عن ٥٠٠ غم (أي أننا نؤيد ادعاء الشركة المنتجة).

منسال ٥:

إذا كان من المفروض أن لا يزيد وزن قرص الدواء من إنتاج شركة معينة عن وحترا أن المنافق عن التعالى و المنافق و وجدنا أن وجدنا أن المنافق المينة هو ١٠ و ١٠ علغم والإنحراف الميناري للوزن هو ٣٠ ملغم والإنحراف الميناري للوزن هو ٣٠ ملغم، فهل يمكن القول بأن وزن القرص المنتج يطابق المواصفات المطلوبة؟ (استخدم مستوى معنوية ١٪).

الحيل:

ξ · ≥ μ : 0H

ξ· < μ : ,H

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع عم هو الوسط الحسابي للعينة س.

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار

$$\frac{\overline{w} - \overline{v}}{\overline{w}} = \frac{\overline{w} - \mu}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}}}$$
 پتبع توزیع ت بدرجات حریة (ن - ۱).

وبالتعويض في الدالة الإختبارية فإن

ومن جدول توزيع ت (جدول رقم (٥)) فإن

٠٠٠٩٢ = ٢٩٤٠,٩٩

وحيث أن قيمـة ت أقـل من قيمـة ت٢٤٠٠.٩٥ فـإننـا نقبـل الفــرض (أي أن الأقراص المنتجة تطابق المواصفات المطلوبة).

(۱ - ۸) اختیارات نسبة المجتمع Tests of Population Proportion

إذا كانت نسبة المفردات التي تحمل صفة ما في مجتمع معين حجمه لبه هي ح واخترنا جميع العينات الممكنة التي حجمها ل من هذا المجتمع وحسبنا نسبة المفردات التي تحمل هذه الصفة (ح) في كل عينة من هذه العينات فإن

$$\frac{\partial - \lambda}{\partial x} \times \frac{\partial - \lambda}{\partial y} = \frac{\partial - \lambda}{\partial y} \times \frac{\partial - \lambda}{\partial y} = \frac{\partial - \lambda}{\partial y$$

 $\frac{U_N-\dot{U}}{U_N-1}$ معامل تصحيح المجتمعات المحلودة ويؤول إلى واحد صحيح عندما يكون المجتمع غير محلود أو عندما لا يتجاوز حجم العينة 1 ٪ من حجم المجتمع .

وقد وجد أن نسب المفردات التي تحمل الصفة موضوع الدراسة في جميع المينات الممكنة تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بتوقع ح وتباين $\left(\frac{-(1-\zeta)}{\zeta}\right)$ في حالة المجتمعات غير المحدودة كها هو مبين في المعادلة (1 - 1 - V). ويستخدم توزيع المعاينة المعتد في تكوين فترة الثقة لنسبة المجتمع كها أسلفنا في الباب السابق واختبار الفرضيات التي تعلق بهذه النسبة كها هو موضّع في الأمثلة التالية.

مثال ۱:

تاجر تفاح بالجملة يدعي أن ما يورّده من هذه الفاكهة لا يحتوي على أكثر من ٤٪ من الثيار التالفة. فإذا اختيرت عينة عشوائية بسيطة من ٦٠٠ تفاحة ووجد فيها ٣٦ ثمرة تالفة اختبر صحة ادعاء البائع بمستوى معنوية ١٪.

الحسل:

H₀: ح ≤ ١٠,٠٤

H: ح > ۱٫۰٤

·, · 7 = - 77 = ^

$$Y, o = \frac{\cdot, \cdot \xi - \cdot, \cdot \gamma}{\underbrace{\cdot, \cdot \chi \times \cdot, \cdot \xi}_{\cdot, \cdot}} = c$$

۲,۳۲٦ = ٠,٩٩٥

وحيث أن ى > ي٩٥٠. فإننا نرفض الفرض (أي أن ادعماء البائم غير صحيح).

مشسال ۲:

يدعي منتج أحد الأدوية أن علاجاً معيناً يزيل أثر الحساسية لمدة ثمان ساعات بنسبة ٩٠٪ على الأقل. فإذا اختيرت عينة عشوائية بسيطة من المصابين بهذا المرض حجمها ٣٠٠ شخص، ووجد بعد إعطائهم العلاج المشار إليه أن ١٦٠ منهم حصلوا على النتيجة المنتظرة، فها هو تعليقك على ادعاء المنتج؟ استخدم مستوى معنوية ١٪.

H₀: ح ≥ • ٩٠, •

₁H : ح < ۹۰۰

$$\cdot, \Lambda \cdot = \frac{17}{1} \cdot \Lambda \cdot = \frac{1}{1}$$

ی... = - ۲,۳۲٦

وحيث أن ى < ي.٠٠. فبإننا نسرفض الفرض (أي أن ادعماء المنتج غسير صحيح).

مشيال ۳:

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن نسبة الأشخاص المذين يوافقون على رأي معين في منطقة ما هي ٢٤، °، إذا وجد أن عمد الذين يوافقون عمل هذا الرأى في عينة عشوائية بسيطة حجمها ١٠٠ هو ٢٠.

الحسل:

$$v = \frac{v_{1}, v_{2}, v_{3}}{\sqrt{\frac{3r_{1}}{3r_{1}} \cdot v_{3}}} = -\gamma A, v_{3}$$

وحيث أن ي تقع بين ي٠٠٠. ، ي٠٩٥. . فإننا نقبل الفرض.

(۹ ـ ۱ ـ ۷) اختبارات الفروق Tests of Differences

أولاً: اختبارات الفروق بين متوسطى مجتمعين

Tests of the Difference Between Two Population Means

إذا فـرضنا أن لـدينا مجتمعـين الأول توقعـه μ, وتباينــه ٢٥, والثاني تــوقعه μ, وتباينه ٧٥ فإننا نختبر الفـروض المتعلقة بالفــرق بين متــوسطي المجتمعـين،

أي μ - μ, وهذه الفروض هي:

ان باب - باب = صفر ۱۱. باب - باب ≠ صفر (۷ ـ ۱ - ۱۵)

۱۱۰ : سم سم د صدر وهو من الصورة (١ – ١ – ٧).

اه و المحرور و الماما

H₀: بل - بل ≤ صفر

(V-1-17) مفر $= -\mu - \mu: H$

وهو من الصورة (٢ ـ ١ ـ ٧)

أو

ا ناب – باب ≥ صفر H : ۵H ≥ صفر

(V-1-1V) مفر $\mu = \mu$: ا μ : المار μ

وهو من الصورة (٣ ـ ١ - ٧).

١ _ اختبارات العينات الكبرة

إذا بدأنا بمجتمعين معتادين الأول توقعه μ , وبناينه χ والثاني توقعه χ وبناينه χ واخترنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من هـ فين المجتمعين الأولى حجمها ن والشانية حجمها ن وحسبنا الوسط الحسابي للعينة الأولى χ والوسط الحسابي للعينة الأولى χ وقينه بكن إثبات أن الفرق χ و χ وتباين χ وتباين χ وفي العادة فإنسان المحتوي ولا وفي العادة فإنسا لا نعلم قيمتي χ وفي العادة فإنسا لا نعلم قيمتي χ وفي العادة فإنسا لا نعلم قيمتي χ

وبالتالي فإننا نقدَرهما باستخدام ع ﴿ ٤ ع ﴾ على التوالي. وإذا كنان حجم كمل من العينين أكبر من * فإن الفرق * * له توزيع معتاد بتوقع * * وتباين * $^$

مثسال ۱:

شركة تملك مصنعين الإنتاج المصابيح الكهربائية، اختيرت عينة عشوائية من التاج المصنع الأول حجمها ن، = ٣٠ مصباحاً ووجد أن متوسط عمر المصباح لهذه المينة س، = ١٢٠٠ ساعة، واختيرت عينة عثوائية ثانية من إنتاج المصنع الثاني حجمها ن، = ٢٠٠ مصباحاً ووجد أن متوسط عمر المصباح لهذه المينة س، = ١٢٠٠ ساعة. فإذا علم من خبرة سابقة أن تباين ملة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول هو ٢٠٠٠ (ساعة) ، وتباين صلة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثاني هو ٢٠٠٠ (صاعة) اختير بمستوى معنوية ٥/ الفرض القائل بأن متوسط مدة خدمة المصابيح في المصنعين متساو.

الحسل:

 $\mu = \mu - \mu = 0$ صفر

 $\mu - \mu + \mu + \mu + \mu$ المفر

والمقدّر المناسب للفرق $\mu - \mu$ هو س μ – س μ

$$\frac{\overline{(w_1 - w_2)} - \overline{w_1} - \overline{(w_1 - w_2)}}{\overline{w_1 - w_2}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$$

ی د۲۰۰۰ = - ۱٫۹۲

ی ۱۹۹۰ = + ۱۹۹۱

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين قيمتي يه٠٠٥٠ ، ي٠٩٥٠ . فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع الأول لا يساوي متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع الثاني).

مشال ۲:

يريد مدير الميعات في شركة للسيارات أن يثبت لمدير عام هذه الشركة أن متوسط الأرباح للسنة الحالية μ , أكبر من متوسط الأرباح للسنة الحالية μ , فإذا اختار عينة عشوائية حجمها ν 0 من السيارات التي بيعت في السنة الحالية ووجد أن متوسط الربح لملفه العينة هو ν 0 من عناراً والإنحراف المعياري للأرباح في هذه العينة ع ν 0 ديناراً، واختار عينة عشوائية حجمها ν 0 من السيارات التي بيعت في السنة الماضية ووجد أن متوسط الربح لمله العينة هو ν 0 معنوية ν 0 محمة ادعاء مدير المياري للأرباح ν 0 ديناراً. اختبر بمستوى معنوية ν 0 صحمة ادعاء مدير الميمات.

الحل

$$= \frac{(\overline{w_i} - \overline{w_y}) - \overline{c} (\overline{w_i} - \overline{w_y})}{\overline{v_{w_i}} - \overline{w_y}}$$

$$= \frac{\sqrt{3^{1/2} - \sqrt{3^{1/2}}}}{\sqrt{3^{1/2} + 3^{1/2}}}$$

وحيث أن ي < ي.٥٥. فإننا نقبل الفرض (أي أن مدير المبيعات لم يتمكن من تقديم الدليل المقنع بأن متوسط الأرباح في السنة الحالية أكبر من متوسط الأرباح في السنة الماضية).

٢ _ اختيارات العينات الصغرة

لقد فرضنا في الحالة الأولى (إختبارات العينات الكبيرة) إن حجم كل من

العينتين العشوائيتين المستقلتين أكبر من ٣٠ وبالتالي فإن الاختبار يعتمد عمل النوزيع المطبيعي. أما إذا كمان حجم كل من العيندين المستقلتين ٣٠ أو أقـل فإنسا نستخـدم توزيع ستيودنت (ت). واستخدام تـوزيع ت في هـذه الحالـة يتطلب تـوافرالشرطـين التالـمن:

أ ـ أن تكون العينتان العشوائيتان مستقلتين

- أن يكون عجتمعا الدراسة معتادين وتبايناهما متساويين ($\sigma = \sqrt[7]{\sigma} = \sqrt[7]{\sigma}$).

وحيث أن التباين في العادة غير معلوم فإنسا نقدره بـالتباين التجميعي للعينتـين معاً Combined or Pooled Variance ويعرّف كها يلي:

$$3^{7} = \frac{(\dot{\upsilon}_{\ell} - \ell)3^{7}_{\ell} + (\dot{\upsilon}_{r} - \ell)3^{7}_{r}}{\dot{\upsilon}_{\ell} + \dot{\upsilon}_{r} - Y} \tag{Al-I-Y}$$

حيث

والدالة الاختبارية هي

$$=\frac{\overline{w_0},-\overline{w_0}}{\sqrt{3^2\left(\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_0}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\dot{c}_{i}-1)^{\frac{3}{4}}}, +(\dot{c}_{i}-1)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{(\dot{c}_{i}-1)^{\frac{3}{4}}}, +(\dot{c}_{i}-1)^{\frac{3}{4}}}} \sqrt{\frac{1}{\dot{c}_{i}} + \frac{1}{\dot{c}_{i}}}$$

(V - 1 - 19)

مثال

اعطي امتحان في مبادىءالإحصاء لمجموعة من طلبـة السنة الأولى في الجـامعة ----- الأردنية مكونة من 11 طالباً من القسم العلمي و 4 طلاب من القسم التجاري. وقد وجد أن الوسط الحسابي لعلامات طلبة القسم العلمي $m_{\rm c} = 0$ والإنحراف المعياري لعلاماتهم ع $_{\rm c} = 0$ والوسط الحسابي لعلامات طلبة القسم التجاري $m_{\rm c} = 0$ والإنحراف المياري لعلاماتهم ع $_{\rm c} = 0$ اختبر بمستوى معنوية $_{\rm c}$ الفرض القائل بأن الفرق بين متوسط علامات القسم العلمي ومتوسط علامات القسم التجاري غير معنوي .

الحل

 $\mu_0: \mu - \mu = 0$

μ - μ : ، Η

حيث به, متوسط علامات طلبة القسم العلمي به متوسط علامات طلبة القسم التجاري

وبالتعويض في (۱۹ ـ ۱ ـ۷) فإن

$$\frac{V \cdot V_0}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{13}\right) \frac{7\xi \left(1 - \frac{4}{1}\right) + \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{1}\right)}{Y - \frac{4}{1} + \frac{1}{13}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{VAA}{77} \times \frac{07}{337}}}$$

$$\frac{\frac{\delta}{\delta}}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = \frac{\delta}{\delta}$$

وحيث أن قيمة ت تقع بسين ٢٣٠٠, ٢٣٠٠ و ٢٣٠٠, ٢٠٥٠ و ٢٠٠٠ فإنسا نقبل الفرض (أي أنه لا يعوجد فرق معنوي بين متوسط عملامات طلبة القسم العلمي ومتوسط علامات طلبة القسم التجاري).

٣_ اختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين عندما تكون العينتان غير مستقلتين Paired Difference Tests of Two Population Means

لقد افترضنا في الحالتين الأولى والثانية أن الميتين مستقلتان. ولكن هناك بعض الحالات التي لا تكون فيها المينتان مستقلتين. فإذا قامت إدارة مصنع معين بتنظيم برنامج تدريبي لمجموعة من المهال وسجلت انتاجية العامل قبل وبعد التدريب فإن هاتين القيمتين غير مستقلتين. فإذا رمزنا للفرق بين الإنتاجية بعد التدريب والإنتاجية قبل التدريب بالرمز ف فإن الوسط الحسابي للفروق (ف) يعرف كها يل:

$$\frac{y = \frac{y}{1 - Y}}{y} = \frac{y}{y}$$

والإنحراف المعياري للفروق عن هو:

$$\frac{\sqrt{(i-1-1)}}{(i-1-1)} \sqrt{\frac{2i-1}{(i-1-1)}}$$

أما الدالة الإختبارية، بإفتراض أن الفروق تتبع التوزيع الطبيعي، فهي

وتتبع توزيع ستيودنت (ت) بدرجات حرية (ن - ١).

مثال

الانتاجية بالوحدة بعد التدريب	الانتاجية بالوحدة قبل التدريب	لعامل
٥٨	٥٢	-
٦٠	٥A	۲
70	٤٩	٣
0 \$	٥٠	٤
70	٥٤	٥
٥٧	٥١	٦
7.	٥٥	٧
٥٥	٥٠	٨
7.8	11	4
٥٠	٤٠	١٠
باحية بعيد التدريب أعيل منها قد	ي مستدية ٧١ الفرض القائل بأن الانت	فتد عسته

اختبر بمستوى معنوية 1٪ الفرض القاتل بان الانتباجيه بعبد التدريب اعبل منها فبدل التدريب.

الحل

۱۲ : بجان ف ر > صفر	≤ صفر	Ho : محت فر :
(ف -ف)	<u>ن-ن</u>	ف _
1	1	7
4	٣-	٣
٤	۲	٧
١	1-	ŧ
4	4-	7
1	1	٦
صقو	صفر	•
صفو	صقو	٥
٤	4-	٣
40	٥	1.
30		0.

بالتعويض في (٢١ - ١ -٧)

$$3i. = \sqrt{\frac{30}{p}}$$

$$= \sqrt{T}$$

$$= 03.7$$

بالتعويض في (٢٢ - ١ - ٧)

وبما أن قيمة ت أكبر من ته و . . ، فإننا نوفض الفرض (أي أن الإنتاجية بعد التدريب أكبر منها قبل التدريب).

ثانياً: اختبارات الفروق بين نسبتي مجتمعين

Tests of the Difference Between Two Population Proportions

إذا فرضنا أن ح، هي نسبة النجاح في مجتمع ما، ح، هي نسبة النجاح في مجتمع آخر. واخترنا عينة عشوائية كبيرة من المجتمع الأول حجمها ن، وعينة عشوائية كبيرة من المجتمع الثاني حجمها ن، وكانت نسبة النجاح في المينة الأولى هي ح، ونسبة النجاح في المينة الأولى هي ح، ونسبة النجاح في المينة الثانية ح، حيث

$$_{3}^{\wedge} = \frac{U}{U_{1}} + \frac{U}{U_{2}} + \frac{U}{U_{3}} + \frac{U$$

 $\frac{v}{-v} = \frac{v}{v}$ کر v = v ک نہ عدد مرات النجاح في العینة الثانیة $\frac{\wedge}{v}$ (۷ - ۱ - ۲٤)

فقد أثبت الاحصائيـون، كها سبق أن أسلفنـا، أن الفرق بـين نسبتين العينتـين ٨ ^ ^ ^ ^ - ^ م) يتبع التوزيع الطبيعي

وتباین: تبا
$$(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}) = \frac{-\frac{\lambda}{2}(1-\frac{\lambda}{2})}{\frac{\lambda}{2}} + \frac{-\frac{\lambda}{2}(1-\frac{\lambda}{2})}{\frac{\lambda}{2}}$$
 (۲۲ - ۲ - ۷)

والفروض التي نريد اختبارها والفروض البديلة بمكن أن تكون:

من الصورة (١ - ١ - ٧)، أي

oH: ح، – ح، = صفر

 $(V - V - V) \neq \phi = 0$

أو من الصورة (٢ ـ ١ ـ ٧)، أي

Ho: ح، – ح، ≤ صفر

(Y - 1 - Y) > صفر (۲ - ۲ - ۷)

أو من الصورة (٣ ـ ١ ـ ٧)، أي

Ho: ح۱ – ح۲ ≥ صفر

H: ح، -ح، >وصفر (۲۹ - ۱ - ۷)

ومن الجدير بـالذكـر أننا نفـترض دائماً أن ح، = ح، مـا لم يثبت عكس ذلك، وبالتالي فإن كلاً من ح، ك ح. تساوي قيمة واحدة ولتكن ح ، وحيث أن هذه المقيمـة غير معلومة فإننا نقدرها من بيانات العينتين العشواثيتين على النحو التالى:

عدد مرات النجاح في العينة الأولى + عدد مرات النجاح في العينة الثانية
 حجم العينة الأولى + حجم العينة الثانية

$$\frac{v+v}{v+v} = \frac{v+v}{v+v}$$

وبالتالي فإن تباين الفرق بين [^] ، ، [^] ، والمعطى في المعادلـة (٢٦ ـ ١ ـ ٧)، يؤول إلى

$$\frac{(\overset{\wedge}{\bigcirc}-1)\overset{\wedge}{\bigcirc}}{\overset{\vee}{\bigcirc}}+\frac{(\overset{\wedge}{\bigcirc}-1)\overset{\wedge}{\bigcirc}}{\overset{\vee}{\bigcirc}}=(\overset{\wedge}{\bigcirc}-\overset{\wedge}{\bigcirc})\overset{\wedge}{\bigcirc}$$

$$= \stackrel{\wedge}{\supset} (l - \stackrel{\wedge}{\supset}) \left(\frac{l}{\dot{\omega}} + \frac{l}{\dot{\omega}} \right)$$
 (17 - 1 - V)

مفال:

لدراسة مستويات الأمية بين الإناث اللواتي أعيارهن ١٨ سنة فأكثر، في مدينتي عيان وأربد، اخترنا عينتين عشوائيتين بسيطتين الأولى من عيان حجمها ١٢٠٠ ووجد أن عدد الأميات فيها ٤٩٠، والثانية من أربد حجمها ٤٠٠ وعدد الأميات فيها ٤٩٠، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ أن نسبة الأمية في عيان لا تختلف عن نظيرتها في مدينة أديد.

الحيل:

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$$

·, {\{ =

بالتعويض في (٢٦ - ١ - ٧) نجد أن الإنحراف المعياري للفرق بين نسبقي

العينتين هو

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq N, \\ 0 \leq i \leq N}}^{N} = \sqrt{3/3}, \quad x \neq y \leq i \leq N, \quad x \neq y \leq N$$

*.*Y\YY =

والفرضين العدمي والبديل هما كها في (٢٧ - ١ - ٧).

. avacs

وحيث أن ى تقع بين يه.٠٠٠ ، يه.٩٧٠ فإننا نقبل الفرض (أي أن نسبة الأمية بين النساء ١٨ صنة فأكثر في مدينة عيان لا تختلف عن نظرتها في مدينة أربد.

> · (۱۰ ـ ۱ ـ ۷) اختبار تباین مجتمع معتاد من المعلوم أن المقدار

1.47 =

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{c}}$$
 يتبع توزيع كأي تربيع بدرجات حرية \sqrt{c}

(ن - ۱) حیث سرر (ι = ۱ ۵ ۲ ۵ ۵ ن) یتبع توزیع معتاد توقعه μ وتباینه δ
 واختبارات تباین المجتمع المعتاد هی:

وهو من الصورة (۱ ـ ۱ ـ ۷)
$$^7\sigma \leqslant ^7\sigma : _0H$$

$$\{ \sigma > ^7\sigma : _1H \}$$

نقبل الفرض في (٣٢ ـ ١ ـ ٧) إذا كان

$$(1-\dot{\omega}, \dot{\alpha} - 1) \propto \frac{(\dot{v} - \dot{v})}{\dot{v} - \dot{v}} \approx \chi^{\gamma} \left(1-\dot{\omega}, \frac{\alpha}{\gamma}, \dot{\omega} - 1\right)$$

ونقبل الفرض في (۳٫۳ - ۱ - ۷) إذا كان
$$\frac{(\dot{v} - 1)^{3}}{(\dot{v} - 1)^{3}}$$
 $\times \chi^{*}$ (۵ - ۱)

وأخيراً نقبل الفرض في (٣٤ ـ ١ ـ ٧) إذا كان

$$(1-\dot{\wp},\alpha-1)\sqrt{\chi} \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}(1-\dot{\wp})}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\sqrt{(1-\dot{\wp},\alpha-1)}\sqrt{\chi} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\dot{\wp}}}\sqrt{(1-\dot{\wp},\alpha-1)}$$

ناوي مي قيمة χ^{γ} التي أقل منها مساحة α عندما درجات الحرية تساوي χ^{γ}

(ن - ۱) مئسال:

ان: اختبرت عينة عشوائية بسيطة حجمها ٢٥ أسرة من بين الأسر التي تقطن في

مدينة معينة وقد تبيّن أن التوزيع التكراري للدخل الأسبوعي على النحو التالي:

عدد الأسر	فثات الدخل الاسبوعي بالدينار
٣	70.
0	V* - T*
14	V A.
٤	4 · - A ·
	1 * * - 4 *
40	المجسوع

اختبر بمستوى معنوية o الفرض القائل بأن تباين الدخل الأسبوعي لجميع الأسر في هذه المدينة هو o (دينار) إذا علم أن المدخول الأسبوعية تتبع التوزيع المتاد بتوقع μ وتباين v

الحسل:

90 = 40 : 0H

90 ≠ ¹σ : 1H

وجد أن ع<u>ِمْ</u> ك_{ر (س, - س) ٢٤٠٠ = ٢٤٠٠}

درجات الحرية ن - ١ = ٢٥ - ١ = ٢٤

 $\chi^{\gamma}_{~\alpha\gamma}, _{\alpha3\gamma} = . * 3 , \gamma /$

 $\chi^{\gamma}_{\text{ovp,37}} = r^{\gamma}, P^{\gamma}$

وحيث أن ٢٦,٢٦ تقـع بين ١٢,٤٠ و٣٩,٣٦ فـإننــا نقبــل الفــرض (أي أن تباين الدخول الأسبوعية يساوي ٩٥ (دينار)^٧

(١١ - ١ - ٧) اختبار الانحراف المعياري

إذا كان المتغير س يتبع توزيعاً معتاداً، واخترنا عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة س، δ δ سن ، فإن σ = $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{1}{c}$ المعتاد بتوقع σ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{VV}$ (راجع الفقرة (σ - σ - σ)

اختبار الإنحراف المعياري هو σ = σ : هH

والدالة الإختبارية التي تستخدم في إجراء الاختبار هي

$$\frac{\sigma - \xi}{\frac{\sigma}{\partial Y}} = \omega$$

فإذا أردنا مثلاً أن نختبر الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجـد من جـدول التــوزيــع المعتـــاد القيــامي القيم ي.٠٠٠ ، ي.٩٧٥ ، ، فــإذا وقِعت قيـمـة ي بــين ي.٠٠٠ ، ي.٩٧٥ ، فإننا نقبل الفرض.

مشال:

بالرجوع إلى بيانات المثال المعطى في فترات الثقة (فقرة (٥ - ٢ - ٦))، اختبـر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بـأن الانحراف المعيـاري لدخـل الأسرة في المنطقة المذكورة هو ١٠٥ ديناراً

الحسل:

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل، بالرجوع إلى (٣٥- ١ - ٧)، كما يلي:

дН

1.0 ± a. ıΉ

وجد أن ع = ٩ ٣٤ ٣٠ ١ دينار بالتعويض في (٣٦ ـ ١ - ٧) فإن:

· 1727- =

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (١)) نجد أن:.

1.47 -= -....

1.47 = .. ave, c

وحيث أن قيمة ي (-٢٤٢ر)لا تقع بين - ١,٩٦، ١,٩٦ فإنسا نقبل الفرض (أي أن الانحراف المعياري للخل الأسرة في المنطقة المذكورة يساوي. ١ ديناراً).

ρ اختيار معامل الارتباط

صبق أن عرفنا من التقدير بفترة ثقة (فقرة (٦ - ٢ - ٥)) أن المقدار

المعتان على المعتاد بتوقع:
$$\mu = 1,101$$
 لو $\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع: $\mu = 1,101$ لو $\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$

وانحراف معياري ٧٠٠ - ٣

واختبار معامل الارتباط p هـو:

(Y-1-TY)

$$(V-1-7A) = \frac{(\frac{1+c}{1-c})-7101,1 \log (\frac{1+c}{1+c})}{\frac{1}{1+c}}$$

فإذا أردنا أن تختبر الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجد من جمدول التوزيع المعتاد القيامي القيم ١٠٠٠٠ ٤ ٥٠٠٠٠ فإننا نقبل الفرض. فإننا نقبل الفرض.

أما إذا كان الفرضان العدمي والبديل على النحو التالى:

ρ : ρ = صفر

فإننا نستخدم الدالة الاختبارية:

$$c = \frac{\sqrt{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$$

والتي تتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية ن - ٢.

مشال ۱:

بالرجوع إلى المثال المعطى في فترات الثقة (فقرة (٦ ـ ٢ ـ ٦))، اختبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن معامل الارتباط بين رأس المال والربح يساوي ٩٩٪.

الحسل:

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل، بالاعتباد على (٣٧ ـ ١ ـ ٧) كما يلي:

•, 40 = ρ : ₀H

·. 40 ≠ p: 1H

وبالتعويض في (٣٨ ـ ١ ـ ٧) فإن:

Y, 1AV -=

ومن جدول التوزيع المعتلد القياسي (جدول رقم (١)) نجد أن:

وحيث أن ى تقع بين ى٠٠٠٠٠ ك ع٠٩٠٠ فايننا نقبل الفرض (أي أن معامل الارتباط بين رأس المال والربح يمكن أن يساوي ٩٥, ٠).

مثبال ۲:

إذا كان معاسل الارتباط بين علامات ١٥ طالباً في امتحانين غتلفين ر = ٠٠,٣٥ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن معامل الارتباط بين علامات الطلاب في الامتحانين ρ = صفر.

الحسل:

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل بالرجوع إلى (٣٩ ـ ١ - ٧) كما يلي:

Ηه : α = صفر

Η : α ≠ صفر

بالتعويض في (٤٠ ـ ١ ـ ٧) فإن:

ومن جدول توزيع ستيودنت (ت)(جدول رقم (٥)) فإن:

ت ۱٫۷۷۱ = ۱۲۲۰۹۰

وحيث أن ت < ت ١٠٥٠ ، وإننا نقبل الفرض (أي أن معامل الارتباط بين علامات الطلاب في الامتحانين الأول وعلاماتهم في الامتحان الشاني بمكن أن يساوي صفراً.

(١٣ _ ١ _ ٧) اختبارات معالم النموذج الخطي البسيط:

إذا اعتبرنا النموذج المعطى بـالمعادلـة (٢٤ ـ ٣ ـ٣) فإن المـطلوب هــو اختبــار الفرضيات التي تتعلق بثوابت هذا النموذج أ، ب.

أولًا: اختبار الثابت أو المعلمة أ

at the determinant of the latter $\frac{A}{A} = \frac{A}{A}$ and $\frac{A}{A} = \frac{A}{A}$

يتبع تُوزيع ستيودنت (ت) بلىرجات حرية ن - ٢.

وفي المعتـاد فإننـا نختبر الفـرض القائـل بأن معـامل انحـدار ص عــل س، أ، يساوي صفراً، وهذا يعني اختبار الفرض القائل بأنــه لا يوجــد علاقــة بين س وص،

أي :

Ho : أ = صفر

 $+_1: 1 \neq 0$ مقر (۲۲ - ۱ - ۷)

فإذا عوضنا من (٣٥ - ٢ - ١٦)، (٤٣ - ٢ - ١٦)، (٤١ - ١ - ٧) في المدالة الاختبارية (٤١ - ١ - ٧) وقارنا القيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية من جدول توزيع ستيودنت (جدول رقم (٥)) عند مستوى معنوية α ودرجات حرية ن α فإننا نتوصل إلى قرار بقبول الفرض أو رفضه.

ثانياً: اختبار الثابت أو المعلمة ب

من المعلوم أن المقدار ^ _ ب

$$(V-1-\xi Y)$$
 $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

يتبع أيضاً توزيع ستيودنت بدرجات حرية ن - ٢.

ونريد اختبار الفرض القـائل بـأن الحد المـطلق، ب يساوي قيمـة محددة ب.،

Hه : ب = ب

ا+ : ب≠به (۱-۱-۱) ۲-۱-۱

فيإذا عبوضينا مين (1-2-1)، (1-2-1)، (1-2-1)، (1-2-1) في المنافقية المحسوبة بالقيمة الجدولية من جدول تبوزيع ستيودنت (1-2-1) عند مستوى معنوية 1-2-10 ودرجات حرية 1-2-11 فإننا نتوصل إلى قواد بقبول الفرض أو رفضه.

مضال:

أي:

الجدول التالي يبينُ الطول والعمر لعينة عشوائية من أشجار الصنوبر:

المطول بالأقدام (ص)	العمر بالسنوات (س)
4	٣
	1
٧	٧
18	٥
1.	٤

والمطلوب توفيق النموذج الحجلي البسيط لهذه البيانـات واحتبار الفـرض الفائــل مان أ = صـفى

الحيل:

س*	س ص	الطول (ص)	العمر (س)
4	YV	9	*
1	·o	•	١
Ł	3.6	٧	۲
Yo	٧.	18	٥
17	٤٠.	1*	٤
00	107	80	10

وبالتعويض في المادلتين (٢٩ ـ ٢ ـ ٦)، (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$\uparrow = \frac{r \circ t - \frac{\circ t \times \circ 3}{\circ}}{\circ \circ - \frac{(\circ t)^{7}}{\circ}} = t, \gamma$$

$$\frac{10}{0} \times Y, 1 - \frac{10}{0} = \frac{1}{0}$$

$$rac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{$$

$$\cdot, \gamma_0 = \overline{\cdot, \gamma_7} = \overline{\cdot, \gamma_7} = \overline{\cdot, \gamma_7} = \overline{\cdot, \gamma_7}$$

وإذا عوضنا في (٤١ ـ ١ ـ ٧) نجد أن:

وإذا اخترنا lpha + 0 ، • ومن جلول توزيع ستيودنت (جلول رقم (٥)) نجد أن:

وحيث أن قيمة ت المحسوبة لا تقع بين - ٣,١٨١ و ٣,١٨١ فإنسا نرفض الفرض (أي أن معامل انحدار ص على س لا يساوي صفراً وبالتالي فإنه يوجد علاقة خطية بين هذين المتغربين.

(12 - 1 - V) اختبارات معالم النموذج الحطى العام:

إذا اعتبرنا النموذج المعطى بـالمعادلـة (٢٥ ـ ٣ ـ ٦)، فإن المطلوب هو اختبـار الفرضيات المتعلقة بمعالم هذا النموذج أر (ر = ١ ، ٢ ، . . . ، و).

من المعلوم أن المقدار.

يتبع توزيع ستيودنت (ت) بدرجات حرية ن - و.

ونريد اختبار الفرض القائل بأن الثابت أريساوي صفراً، أي:

Ho: أر = صفر

فيإذا صوضينا من (٥٧ - ٢ - ١)، (٦ - ١ - ١)، (٦ - ١ - ٧) في الم وقارنا القيمة المحسوبة بالقيمة الجلولية من جلول توزيع ستيودنت (جلول رقم (٥)) عند مستوى معنوية α ودرجات حرية \dot{v} - و فإننا نتوصل إلى قرار بقبول الفرض أو رفضه.

مثبال:

إذا أعطيت لك بيانات على النموذج الخطي العام:

= 11

وحصلت منها على النتائج التالية (التمرين التوضيحي ٢ في الفصل الأول من

الباب السادس):

اختبر بمستوى معنوية ٥٠,٠ الفرض القائل بأن أ. تساوى صفراً.

الحسل:

$$H_0: h = صغر$$

 $h_1: h \neq صغر$

$$\hat{1}_r = -rr, \hat{1}_r = rs, \hat{1}_r = s$$

$$\begin{array}{ll}
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow$$

ومن جلول توزيم ستيودنت (ت) (جلول رقم (٥)) فإن:

وحيث أن قيمة ت لا تقع بين - ٢, ١٣١، ٢, ١٣١ فإننا نرفض الفرض (أي . أنه لا يمكن أن نسقط س، من النموذج).

(١٥ - ١ - ٧) اختيارات جودة المطابقة والاستقلال:

Tests of Goodness of Fit and Independence:

تعتمـد هذه الاختبـارات على تــوزيع كــأي تربيــع (٢٤). ونستخــدم في إجــراء الدالة التالية:

$$\chi^{r} \text{ (thuis)} = \frac{(t^{2}-t^{2})^{r}}{t^{2}} \qquad \qquad (\forall s - l - l)$$

حبث ك التكرار الشاهد Observed Frequency ك' التكرار المتوقع Expected Frequency

في اختبارات جودة الطابقة أو التمهيد فإنه يكون لدى الباحث أو الدارس فكرة أولية أو يخمَّن أن مجتمع الدراسة له توزيع معينٌ، واختبـار جودة المطابقة هـ و اختبـار فرض ويمكن أن يكون مثلًا على الشكل التالى:

 $78 = {}^{4}\sigma$ الدراسة يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ = 10^{-4} ، وتباين H: بمتمع الدراسة لا يتبع التوزيع المعتاد.

أما اختبار الاستقلال فإنه يستخدم في جداول التوافق Contingency Tables لتقرير ما إذا كان المتغيران س، ص مستقلين أم لا. وهو أيضاً كجودة المطابقة اختبار فرض يمكن صياغته على النحو التالى:

Ho: المتغيران سي، صي مستقلان

H: المتغيران س، ص غير مستقلين

ويختلف اختمار جودة المطابقة عن اختمار الاستقلال في طمريقة حسمات التكرارات المتوقعة وتحديد درجات الحرية.

أولا اختبار جودة المطابقة

إن حساب التكرارات المتوقعة في هذا الاختبار يعتمد على الفرضيات عن مجتمع الدراسة. فلكي نختبر مثلًا أن متغيراً له توزيع منتظم فإننا نختار عينة عشوائيه حجمها ن ونسجل التكرار المشاهد لكل قيمة من قيم هـذا المتغير ونحسب أيضماً التكرارات المتوقعة (متساوية) فيها لو كمان المتغير يتبع التوزيع المنتظم، وبـالتعويض في الـدالة ن (الجماولية) من إجراء الاختبار بمقارنة χ^{γ} (للعينة) بقيمة χ^{γ} جــلــول رقم (٤) وذلك عنــلــ مستوى معنــوية lpha ودرجــات حريــة ٧. فــإذا كــانت $\chi^ au$ - 101(قسينة) < ٪ (الجدولية) نقبل الفرض (أي أن توزيع المجتمع منتظياً). وبالمشل فإنـه يمكن اختبار الفرض القائل بأن متغيراً ما يتبع التوزيع الـطبيعي أو توزيـع ذي الحدين أو توزيع بواسون بالاعتهاد على خواص كل توزيع من هذه التوزيعات.

أما درجات الحرية، في اختبار جودة المطابقة، فيانها تحسب باستخدام المعادلة التالية:

 $(V - 1 - \xi A)$ = 0 - 1 - 0 = (V)

حيث ن مجموع التكرارات المشاهدة

و عدد معالم أو ثوابت المجتمع التي تمّ تقديرها من العينة.

مثال ١

الجدول التالي يبين عدد الكتب المستمارة من مكتبة الجامعة خلال اسبوع معينً : اليوم : السبت الأحد الإثنين الثلاثاء الأربعاء عدد الكتب

المستعارة : ۱۲۰ ۱۲۰ ۱۲۰ ۱۱۰ ۱۴۰

والمطلوب: المختبار الفرض القائـل بعدم وجـود علاقـة بين اليـوم وعدد الكتب المستعارة بمستوى معنوية ٥٪

الحل

oH: مجتمع الدراسة يتبع التـوزيع المنتـظم (أي أنه لا يـوجد فـرق بين عـدد الكتب المستعارة خلال أيام الأسبوع المختلفة).

H: مجتمع الدراسة لا يتبع النوزيع المنتظم

التكرار المتوقع إذا كان التوزيع منتظيًا _ <u>۱۲۰ + ۱۱۰ + ۱۲۰ + ۱۱ + ۱۱۰ + ۱۱ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱۰ + ۱۱ + ۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱ + ۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱</u>

178 =

$$\chi^{T} (\text{Max.i.}) = \frac{(97l - 37l)^{T}}{37l} + \frac{(1l - 37l)^{T}}{37l} + \frac{(17l - 37l)^{T}}{37l} + \frac{37l}{37l}$$

$$+ \frac{(31l - 37l)^{T}}{37l} + \frac{37l}{37l}$$

بالتعویض فی (۸۸ - ۱ - ۷۷): درجات الحریة v = 0 - 1 - max = 3من جدول X^V (جدول رقم (٤)) نجد أن X^V , = ۸۸ و

وحيث أن χ^{ν} (للعينة) χ^{ν} (الجدولية) فإننا نقبل الفرض (أي أن توزيع عدد الكتب خلال أيام الأسبوع منتظم وبالتالي فإنه لا يوجد علاقة بين اليـوم وعدد الكتب المستعارة).

مثال ۲

لمراقبة جودة الإنتاج في مصنع معين اختارت دائرة المراقبة ١٠٠ عينة عشوائية متنالية حجم كـل منها ٥ وحـدات ووجـدت أن تـوزيـع هـذه العينـات حسب عـدد الرحدات المعيبة في كل منها هو على النحو التالي:

عدد العينات	عدد الوحدات المميية
20	•
To	1
١.	4
Y	٣
۲	٤
1	۵

والمطلوب توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات واختبار جودة المطابقة بمستوى معنوية ٢ = ٢٠,٠١ إذا علم أن نسبة المعيب في جميع هذه العينات تساوي ٢,٠٥

الحل

οΗ : عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع ذي الحدين

H : عدد الوحدات المعيبة لا يتبع توزيع ذي الحدين

كخطوة أولى نحن بحاجة إلى التكرارات المتنوقعة والتي يمكن حسابها كما هو موضح في الجدول التالي:

نرارات المتوقعة	التك	ح (س = ر)	عدد الوحدات
	_		المعيبة (ر)
۷٧,٣٨	• , V V٣A =	°ن. (۰۰,) (۹۰,۰۰)	
7*, 47	• , ٢•٣٦ =	مق، (۵۰,۱ (۵۹,۰)	1
۲,1٤	· 3 · Y · E =	°ق _۲ (۰۰,۹۰) (۹۰,۰۰)	Y
٠,١١	*,**11=	°قۍ (۲۰٫۹۰) (۹۰٫۰۰)	٣
٠,٠١	•,•••	°ق؛ (۰۰,۱۵) (۹۰,۰۵)	٤
صقو	= صفر	°ق، (۰۰,۱° (۹۰,۰)	٥
1,	1, ****		الجموع
	Υ(Υ•,Ψ٦ - Ψα Υ•,Ψ٦	Y(VV, TA - £0)	χ (للعينة) =
	(,1Y~1*	+ "(٢,1٤-1*)	
۸۱۳	, 204 + 44, 47	14 + 1 . , 0 7 V + 1 7 , 0 0 .	=
		A17.744	=

وبـالتعـويض في (٤٨ ـ ١ ـ ٧) فـإن درجـات الحـريـة ٧ = ٤ - ١ - صفـر = ٣ حيث ضممنا قيم المتغير ٣ ك ٤ ك ٥ في قيمة واحدة.

وبما أن ٪' (للعينة) > ٪' (الجدولية) فإننا نرفض الفرض (أي عدد الوحـدات المعيبة في إنتاج هذا المصنع لا يتبع توزيع ذي الحدين) بالرجوع إلى بيانات المثال المعطى في الفقرة (٣ ـ ١ ـ ٤)، المطلوب اختبار جودة مطابقة توزيع بواسون لهذه البيانات.

الحل

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل على النحو التالى:

Ho : عدد حوادث العمل يتبع توزيع بواسون

H : عدد حوادث العمل لا يتبع توزيع بواسون

التكرارات المشاهدة من سجلات المصنع والتكرارات المتوقعة التي تمّ حسابها بافتراض أن عدد حوادث العمل يتبع توزيع بواسون مبيّنة في الجدول التالي:

التكرارات المتوقعة (ك')	التكرارات المشاهدة (ك)	عدد الحوادث
1.88	177.	•
AVF	2773	١
***	188	*
£A.	**	۳
A	٥٢	٤
*	71	٥
صفر	_	٦
7	7	المجموع
-	1.88	χ (للعينة)
	= 05,300	

حيث أهملنا العدد الأخير (٦) وأضفنا تكراره المشاهد إلى التكرار السابق.

وإذا استخدمنا مستوى معنوية ٥٪ فإن $\chi^{\prime}_{3.0.}$. = .9.80, ٥، وحيث أن χ^{\prime} (للعينة) χ^{\prime} (الجدولية)فإننا نوفض الفرض (أي أن عدد حوادث العمل لا يتبع توزيع بواسون).

ثانيا اختبار الاستقلال

إفرض أن لدينا المتغيرين س، ص وإن المتغير س يأخذ الأوجه س، ٤ س، ٥ م، ٥ ، ،، ٤ س، والمتغير ص يأخذ الأوجه ص، ٤ ص، ٥ . . . ٤ ص، وبوبنا البيانات التي . تتعلق بهذين المتغيرين في جدول مزدوج (جدول توافق) على النحو التالي:

المجموع	صرن		٠٠٠٠ صورد	رص	ص	ص
	- 4					س
	كان		كار	414	1,1	س١
ئ ر.	كبن		ك٠ر	449	كرر	س٠
•						
المصور.	ڭون	• • • •	كر	كوح	العوا	س
•						
كم.	اثمن		كمر			سم
	ك.ن		ك.ر	۲.4	١.٤	المجموع

حيث كور التكرار المشاهد للمفردات التي تتصف بالصفة وللمتغير س والصفة ر للمتغير س والصفة ر للمتغير س المصرف للمتغير ص، كور التكرار المشاهد للمفردات التي النظر عن ص (التوزيع الهامشي للمنتغير س) ، كور (التكرار المشاهد للمفردات التي تتصف بالصفة ر للمتغير ص بصرف النظر عن س (التوزيع الهامشي للمتغير ص) ، كور جموع التكرارات المشاهدة . نختبر الفرض القائل باستقلال المتغيرين س، ص باتباع الخطوات التالية:

١ _ حساب احتمال أن تتصف أية مفردة مختارة عشوائياً بالصفة وللمتغير س

والصفة ر للمتغير ص كيايل:

ح (الصفة وللمتغير س) =
$$\frac{4 \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot}$$
 = $\frac{2 \cdot \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}$ = $\frac{2 \cdot \cdot}{2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}$

وبافتراض أن سي، ص مستقلان:

ح (الصفة وللمتغير س، الصفة ر للمتغير ص) =
$$\frac{b_c}{b_c} \times \frac{b_c}{b_c}$$

٢ _ حساب التكرارات المتوقعة (بافتراض أن س، ص مستقلان)، باستخدام المعادلـــة التالية:

$$\frac{\underline{b}_{i}}{\underline{c}_{i}} \times \underline{\underline{b}_{i}} \times \underline{b}_{i} \times \underline{\underline{b}_{i}} \times \underline{b}_{i}$$

$$c = 1 \times 7 \times \dots \times 7 \times 7$$

$$c = 1 \times 7 \times \dots \times 7 \times 7$$

$$\underline{\underline{b}_{i}} \times \underline{\underline{b}_{i}} \times \underline{\underline{$$

٣ _ حساب قيمة χ (للعينة) باستخدام المعادلة التالية:

$$\chi^{\gamma} \text{ (thatis)} = \frac{2^{\gamma}}{2^{\gamma}} \frac{\frac{(t^{2}w^{-1})^{\gamma}}{(t^{2}w^{-1})^{\gamma}} \frac{1}{(t^{2}w^{-1})^{\gamma}}$$

 ٤ - حساب درجات الحرية من المعادلة التالية (Y-1-0Y) درجات الحرية (٧) = (م - ١) (ن - ١) أي (عدد الصفوف - ١) × (عدد الأعملة - ١).

٥ ـ نستخرج قيمة ٢٦ (الجدولية) من جدول رقم (٤) عند درجات حرية ٧ ومستوى معنوية ۵۲,

 χ^* (الجملولية) فإننا نقبـل الفرض (أي أن المتخـم.ين χ^* (الجملولية) فإننا نقبـل الفرض (أي أن المتخـم.ين س، ص مستقلان).

مثال

يـدعي أحد منتجي الأدوية أن علاجاً معيناً (أ) لـه أثـر كبـير في شفـاء أحـد

الأمراض. وللتحقق من صحة هذا الإدعاء فقد اجريت تجربة عمل ١٦٤ مصاباً بهذا المرض بحيث أعطي نصفهم العملاج (أ) والنصف الثاني عملاجاً آخر (ب) وكمانت نتيجة التجربة على النحو التالي:

			4 3 0	
المجموع	بقيت على	ساءت	تحسنت	حالة المريض
	حالها			نوع العلاج أ
AY	٧٠	1.	٧٥	1
AY	77	17	£ £	ب
371	£3	**	47	المجموع
		ماء المنتج .	منوية ٥٪ صحة إد	اختبر بمستوى ا
				الحل
		£A =	TP×YA	ر. د
			178	11-
		11 =	= YY × YA = 37/	4/1
		7 7" =	= <u>F3 × 7A</u>	~ <u>^</u> 4
		£A =	= TP×7A	, ₄ 5
		11=	= YY × YA	***
		YY * =	= F3 × YA3F1	4 مُ
	+ 11)7 +	- 1·) +	= (Y0 - A3) ^y	χ (للعينة)
	A3) ⁷ +	+	+	
	Y(YF	+	+	

$$= 777, 0 + 190, 0 + 197, 0$$
 $+ 777, 0 + 190, 0 + 197, 0$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$
 $= 777, 1$

وحيث أن ½" (للعينة) < ½" (الجدولية) فإننا نقبل الفرض القائـل بأن نـوع العلاج مستقل عن حالة المرض (أي أن إدعاء المنتج غير صحيح).

الفصل الثاني

الاختبارات غير البارامترية

(١ - ٢ - ١) مقدمة

تحدثنا في الفصل الأول من هذا الباب عن الإختبارات البارامترية (المعلمية) وهي الإختبارات اليي لا يمكن إجرائها إلا إذا افترضنا بأن العينات العشوائية مأخدوذة من مجتمعات لها توزيع احتيالي معروف. وفي كل الحالات السابقة كمانت الاختبارات تتعلق بمعالم هذه المجتمعات سواء كانت متوسطات أو تباينات أو نسب.

وفي هذا الفصل فإننا نتعرض بالدراسة لأنواع أخرى من الاختبارات لا يتطلب إجراؤها معرفة التوزيع الإحتيالي لمجتمع الدراسة، تسمى الإختبارات غير البارامترية (غير المعلمية)، وسوف ندرس منها:

۱ - اختبارات معنوية معامل ارتباط الرتب

The Sign Test اختبار الإشارة ٢

The Mann-Whitney U-Test تقي المان ـ وتني ٢

The Kruskal-Wallis H-Test کروسکال ۔ ووالاس H لکروسکال ۔ ووالاس

ومن الجدير بالذكر أن تطبيق هذه الاختبارات لا يستلزم توافر شروط كشيرة عن مجتمع الدراسة كما إنها تمتاز بسهولة الحساب.

(٢ - ٢ - ٧) اختبار معامل ارتباط الرتب

إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ن من أحد المجتمعات (مجتمع المهال في إحدى المشركات، مجتمع المطلاب في إحدى المدارس، مجتمع الأسر في إحدى المدارس، الأم والوزن، مستوى التعليم ومستوى الخ) وقمنا بقياس متغيرين لكل مفردة منها (الطول والوزن، مستوى التعليم ومستوى الإداء، الدخل والإنفاق على السكن، . . . الغى فإننا نحصل على مجموعة من أزواج

المشاهدات المتناظرة، (س١ 6 ص١) 6 (س٣ 6 ص٣) . . . (سهن 6 صين)، وإذا كنَّا لا نعلم بـأن لهذين المتغـيرين معاً تـوزيعاً طبيعيـاً ثنائيــاً (وهو الشرط الـــلازم لحســاب معامل ارتباط برسون) فإنه لا يزال بالإمكان قياس الارتباط بينها باستعمال معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (ر) والذي يعرف كما يلى:

$$(V-Y-0Y) = \frac{Y - 2 - 2Y}{(1-Y-0Y)}$$

حبث ف = الفرق بين رتبة س ورتبة ص

= عدد أزواج القيم ن

ويتم إجراء الاختبار بإتباع الخطوات التالية:

١ _ صياغة الفرض والذي يمكن أن يكون بإحدى الصور التالية:

اختيار الطرفن:

H₀: معامل ارتباط الرتب ρ = صفر

ho ارتب س غير مستقلة عن رتب ص، أي أن معامل ارتباط الـرتب ho

اختبار الطرف العلوى:

H₀: معامل ارتباط الرتب ρ ≤ صفر

ان م جوجد ارتباط طردي بين رتب س ورتب ص، أي أن $ho < \rho$ اختيار الطرف السفلى:

H₀: معامل ارتباط الرتب ρ ≥ صفر

ان و جد ارتباط عکسی بین رتب س ورتب ص، أي أن $\rho > 0$

٢ _ حساب معامل ارتباط الرتب من المعادلة (٥٣ - ٢ - ٧).

٣ _ تحديد مستوى المعنوية α.

 ٤ - ايجاد القيمة الحرجة من جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (٧)) عند مستوی معنویة lpha وعدد أزواج القیم ن، عنـدما ن> ٢٥. أمـا إذا كانت ن ٢٥ فإنه بمكن تقريب توزيع المعاينة للمعامل ر بتوزيع معتاد توقعه صفـر وتباينــه ا . أ. وفي هذه الحالة فإننا نجد قيمة ي من جدول التوزيع المعتاد العياري عنــد مستوى المعنوية المحدد.

-1771-

٥ مقارنة قيمة ر الفعلية بالقيم أو القيمة الحرجة إذا كانت ن < ٢٥، ويقيم ي
 الجدولية إذا كانت ن ≥ ٢٥ وإتخاذ القرار على النحو التالى:

اختبار الطرف العلوي: نقبل الفرض إذا كانت قيمة رأقل من القيمة الحرجة (3.1 - 1.0) (عندما (3.1 - 1.0)).

اختبار الطرف السفلي: نقبل الفرض إذا كانت قيمة رأكبر من القيمة الحرجة (عندما ن < ٢٥) أو أكبر من ي به (عندما ن ≥ ٢٥).

ومن الجدير بالذكر إنه يمكن استخدام جداول التوزيع المعتماد القياسي حتى ولــو كانت ن < ٢٥.

مثال ۱

لدراسة العلاقة بين مستوى التعليم ومستوى الأداء بين الموظفين في إحدى الشركات، اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٠ موظفين وتم ترتيبهم حسب مستوى التعليم ومستوى الأداء كها هو مين فيا يل:

ف ^۲ = (س′ - ص′)۲	رتبة مستوى الأداء ص'	رتبة مستوى التعليم س'	رقم الموظف
1	1	Y	1
١	٣	٤	٣
١	٣	٣	٣
17	0	1	٤
٤	٤	٦	٥
1	v	A	٦
٤	٩	٧	٧
Ł	A	1.	٨
4	٦	4	4
40	1.	0	١٠
11			المجموع

المحتمر بمستوى معنوية ١٠٪ الفرض القائل بأن مستوى التعليم مستقبل عن مستوى الأداء علماً بأنه لا يوجد لدينا أية معلومات عن التوزيع الاحتمالي لهـذين المستوين.

الحل:

سوف نستخدم في هـلم الحالـة اختبار معـامل ارتبـاط الرتب، والـذي نحسبه بالتعويض من الجدول السابق في المعادلة (٣٥ - ٢ ـ٧):

$$\frac{r \times rr}{r} = \frac{r \times rr}{r} = r \cdot rs,$$

θ: V يوجد ارتباط بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى الأداء أي أن ρ = m مغر θ: يوجد ارتباط بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى θ ان θ θ θ

ومن جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (۷))، عنـدما ۲ = ۰۰.۰۰ ن = ۱۰، نجد أن القيم الحرجة هي – ۲۰.۶،۵۰۲، °، ۱۹۰۰،

وحيث أن قيمة ر لا تقع بين هاتين القيمتين فإننا نرفض الفرض (أي أنه يوجد علاقة بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى الأداه).

مثال ۲:

لدراسة العلاقة بين علامات طلبة كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية في مادة مبادىء الإحصاء ١٠١ اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٠٢ من الطلاب الذين أجري لهم الامتحان الأول في هاتين المادتين فكانت علاماتهم:

علامة أ ق ۱۱۰ ص	علامة أح ١٠١ س	رقم الطالب
70	7.	1
18	٧٠	Y
٧٦	Ao	٣
٥٠	07	8
3A	9.4	٥
	Special State	

علامة أ ق ١١٠ ص	علامة أح ١٠١ س	رقم الطالب
77	٥٧	٦
14	٧٦	٧
01	11	٨
AY	AA	4
0 A	78	1.
۸۳	44	11
דד	٦٨	17

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجبود علاقة طردية بين رتب المطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠ وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحل

ن ۲ =	رتب الطلاب في	رتب الطلاب في	رقم الطالب
(س'- ص') ^۲	مبادىء الاقتصاد	مبادىء الإحصاء	
	<u>۱۱۰ ص'</u>	۱۰۱ س'	
٤	٧	4	١
٤	٨	٦	4
صفو	٤	٤	٣
١	17	11	٤
١	1	٧	٥
1	4	1.	٦
صفر	۰	٥	٧
١	11	17	٨
صفر	٣	٣	4
٤	1.	A	1.
1	Y	١	11
1		<u> </u>	- 17
14			المجموع

$$c = I - \frac{\Gamma \times \Lambda \Lambda}{(1 - 188) \cdot 17} - I = \Gamma - \Gamma \Gamma,$$

$$c = I - \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma$$

Ho: الارتباط بين رتب السطلاب في مبادئ، الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادئ، الاقتصاد ١١٠ عكسى أو يساوى صفر، أي أن ρ ≤ صفر

Hُ: الارتباط بين رتب السطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠ طردي أي أن ρ > صفر

ومن جـدول معامـلات سبيرمـان (جدول رقم (۷)) عنـدما α ، ٠٠، ن= ۱۲ فأن الفيمة الحرجة هي ٢٠٥٠،

وحيث أن ر الفعلية أكبر من القيمة الحرجة فإننا نرفض ٥٢ (أي أنه يوجد ارتباط طردي بسين رتب الطلاب في مبادئ الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادئ الاقتصاد ١٠١).

مثال ۴:

لدراسة العلاقة بين دخل الأسرة وعدد الأطفال الأحياء الذين تمّ انجابهم فيها، اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٨ أسرة من تلك التي تقطن في صدينة ما وقام بترتيب هذه الأسر حسب دخل الأسرة وعدد الأطفال الذين تمّ انجابهم لكل منها كل هو مينٌ في الجدول التالي:

ف= (س' – ص') ^۲	رتب الأسر حسب علد الأطفال ص'	رتب الأسر حسب الدخل س'	قم الأسرة	
707	14	- Y		
337	17		,	
13	1.	3	٠	
4	v	١٠	1 £	
PAY	1	14	τ .	

ف۲ = (س - ص')۲	رتب الأمر حسب عدد الأطفال ص	رتب الأسر حسب الدخل س	رقم الأسرة
۸۱	٣	jx	7
٤٩.	٦	14	٧
***	٧	14	A
17	٩	0	٩
13	٤	٨	1.
143	14	٣	11
147	10	١	14
17	11	V	۱۳
13	٥	4	18
4	A	11	10
٤	١٢	18	17
٤	۱۳	10	۱۷
٤	18	13	1.4
1987			المجموع

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجود علاقة عكسية بـين دخل الأسرة وعـدد الأطفال الأحياء الـذين تمّ انجابهم لكـل منها، علماً بـأن الباحث لا يعـرف شيئاً عن التوزيع الإحتالي المشترك لهذين المتغيرين.

الحسل:

بالتعويض في المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن

$$c = 1 - \frac{\Gamma \times \Gamma 3 \circ I}{\Lambda I (377 - I)} = 1 - \circ P \circ c I$$

= - ەەەر،

Ho: الارتباط بين رتب الأسر حسب الـدخل ورتبهـا حسب عــدد الأطفـال الــذين ولدوا فيها طردي أو يساوي صفر، أي أن ρ ≥ صفر الارتباط بين رتب الأسر حسب الدخل ورتبها حسب عدد الأطفال الاحياء
 الذين ولدوا فيها عكسى، أى أن ρ < صفر

وحيث أن ر الفعلية أصغر من القيمة الحرجة لذلك نرفض H (أي أنه يوجد ارتباط عكسي بين رتب الأصر حسب المدخل ورتبها حسب عدد الأطفال الأحياء الذين ولدوا فيها).

مثسال ٤:

لدراسة العلاقة بين الدخل ومستوى التعليم في إحدى الشركات اختمرت عينة حجمها ٣٠ مستخدماً تم ترتيبهم حسب الأجرة الشهرية ومستوى التعليم فحصلنا على البيانات التالية:

ف* ≃(س' - ص′)*	رتية المستخدم	رتبة المتخدم	رقم المتخدم
	حسب مستوى	حسب مستوى	
	التعليم س ً	الدخل صُ	
9	0	۲	1
٤	7	٤	٧
٤	٤	٦	٣
£9	1.	٣	٤
صقر	A	٨	٥
4	14	4	٦
1	٣	1	ν
171	۴	١٤	A
7.8	YA	۲٠	4
4.1	٧٠	77	١٠
Yo	74	YA	
197	17	۳۰	11
٤	14	17	14 14

ف' = (س' - ص')	رتبة المستخدم حسب مستوى التعليم س'	رتبة المستخدم حسب مستوى الـداخل ص'	رقم المستخدم
PAY	**	•	18
٤٩.	١٧	1.	10
41	١	٧	17
171	10	77	17
70	٧	14	14
٤	4	11	19
٤	11	١٣	٧.
770	۳.	10	*1
17	14	1٧	44
Yo	77	*1	74
171	18	70	3.4
40	14	37	40
વં	*1	1.4	77
٤	40	77	77
٩	48	۲V	YA
3.5	TV	19	79
٤٩	79	**	۳۰
1097			المجموع

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد ارتباط بين رتبة المستخدم حسب مستوى الدخل ورتبته حسب مستوى التعليم بمستوى معنوية ٥٪.

الحيل:

بالتعويض في (٥٣ ـ ٧ ـ ٧) نجد أن:

$$\frac{4000}{1140} - 1 = \frac{1040 \times 1}{(1-400)^{10}} - 1 =$$

- YTA-

Ho : ρ = صفر، Hr : ρ ≠ صفر

وبما أن ن > ٢٥ فإن ر تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين معر

ي أن

ى = (۲۹، ٠ - صفر) ÷ ۲۹/۳ = ۲۹۱۳ = ۲۹۱۳

ومن جدول التوزيع المعتاد رقم (٣) نجد أن

1,47 -= ... 706

197 + = . . 9406

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين -١,٩٦ ، ١,٩٦ فـإنــا نـرفض ٥٦ (أي أنــه يوجد علاقة بين مستوى الدخل ومستوى التعليم).

(٢ - ٢ - V) اختبار الإشسارة

أولاً: حالة المجتمع الواحد

يستخدم اختبار الإنسارة لمجتمع واحمد لاختبار الفرض القائل بأن وسيط المجتمع ويساوي قيمة مفترضة و. . هذا ويعتبر اختبار الإنسارة واحداً من أبسط الاختبارات الإحصائية، حيث نحتاج لتطبيقه توافر الشرطين العامين التاليين:

١ _ المتغير الذي نقوم بدراسته متصل

٢ _ المجتمع الذي نقوم بدراسته له وسيط

فإذا أردنا مثلًا اختبار الفرض

: اط₀: و ≂وہ

مقابل الفرض البديل H: و < وه

فإنه إذا كان الفرض صحيحاً فإننا نتوقع أن ٥٠٪ من القيم المشاهدة أصغر من وه ، وهذا يعني أنه إذا كان ان صحيحاً فإن احتيال أن تزيد أية قيمة مشاهدة عن وه يساوي ١/ وبالتالي إذا كان عدد القيم المشاهدة التي تقل عن وه كبيراً فإنسا نتردد في قبول ١٠ ونكون أكثر ميلًا لقبول ١٠.

ولتطبيق اختبار الإشارة فإننا نطرح القيمة المفترضة وه من جميع القيم المشاهدة ونسجل الفرق مع إشارة عملية الطرح. فإذا كان اله صحيحاً فإننا نتوقع أن نحصل على عدد من الإشارات الموجبة متساوٍ مع عدد الإشارات السائبة، أما إذا كان عدد الإشارات الموجبة أكبر من عدد الإشارات السائبة أو العكس فمإننا نميل إلى رفض الاه وقبول الن . والمطلوب هو وضع قاعدة يمكن على أساسها الحكم بقبول أو رفض الن تبماً لعدد الإشارات السائبة وعدد الإشارات الموجبة التي نحصل عليها.

إن عدد الإشارات السالبة (أو الموجبة) في هذه الحالة يتبع توزيع ذي الحدين (أو التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين). فإذا كان الم صحيحاً (و= وه) فإن عدد الإشارات السالبة أو الموجبة يتبع توزيع ثنائي ذي الحدين بمعلمتين ن (عدد المشاهدات).

$$(v ≤ v) = 2 (m < v + \frac{1}{4})$$
 (30 - 7 - 4)

وفي حالة استخدام التقريب المطبيعي لتوزيع ذي الحدين فمإن (\$ ٥ - ٢ - ٧) تؤول إلى

$$(V-Y-00) \qquad \left(\frac{\frac{\dot{U}}{Y}-\frac{1}{Y}}{\frac{\dot{U}}{Y}}+\frac{1}{2}\right) > 0 = 0$$

وإذا كان الاختبار ذا طرفين وكان عدد الإشارات الموجبة ر $\frac{\omega}{\gamma}$ فإننا نحسب قيمة ى من الدالة الإختبارية التالية:

$$v = \frac{(c + \frac{1}{\gamma}) - \frac{\dot{c}}{\gamma}}{\sqrt{\frac{\dot{c}}{\zeta}}}$$

ونرفض H_0 إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٦ - ٢ - ٧) أقبل من $3 - \frac{\dot{\nu}}{\gamma}$. أما إذا كان عدد الإشارات الموجبة ر $\frac{\dot{\nu}}{\gamma}$ فإننا نحسب قيمة ى من الدالة الاختيارية التالية:

$$S = \frac{(c - \frac{1}{\gamma}) - \frac{c}{\gamma}}{\sqrt{\frac{c}{\zeta}}}$$

$$S = \frac{(c - \frac{1}{\gamma}) - \frac{c}{\gamma}}{\sqrt{\frac{c}{\zeta}}}$$

ونرفض الفرض إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) أكبر من أو تساوي ي.٠ ـ <u>ـ ـ</u>

أما إذا كان الاختبار ذا ظرف واحد سفلي فإننا نرفض الفرض إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٦ ـ ٣ ـ ٧) أقل من يهير .

وأخيراً إذا كان الإختبار ذا طرف علوي فإننا نرفض الفرض إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) أكبر من قيمة يريب

مئسال ۱:

البيانات التالية تمثل أوزان ١٢ طالباً بالكيلوغرام:

OF. AF. 30. 10. 'V. YV. 11. AO.AF., OV. 7F. PO

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن الوزن الوسيط لمجتمع هؤلاء الطلاب هـ و ٢٢ كيلوغرام وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحسل:

نطرح القيمة ٦٢ من جميع الأوزان ونسجّل الفروق مع إشارتها كها يلي:

$$\circ \Gamma - \gamma \Gamma = +\gamma$$
 $\wedge \Gamma - \gamma \Gamma = +\Gamma$ $3 \circ - \gamma \Gamma = -\Lambda$ $1 \circ - \gamma \Gamma = -11$

$$\cdot \mathbf{V} - \mathbf{Y} \mathbf{F} = + \mathbf{A}$$
 $\mathbf{Y} \mathbf{V} - \mathbf{Y} \mathbf{F} = + \cdot \mathbf{I}$ $\mathbf{I} \mathbf{F} - \mathbf{Y} \mathbf{F} = - \mathbf{I}$ $\mathbf{A} \mathbf{0} - \mathbf{Y} \mathbf{F} = - \mathbf{3}$

$$\lambda T - \gamma T = +T$$
 ov $-\gamma T = +\gamma I$ $\gamma T - \gamma T = +I$ Po $-\gamma T = -\gamma$

عدد الإشارات الموجية ر = ٧

عدد الإشارات السالبة ن - ر = ٥

وحيث أن الاختبار ذو طرفين فإن الفرضين العدمي والبديل هما

Ho : و = ٦٢

$$H_1: e \neq 17$$
 و $\neq 17$ و $\neq 17$ و رخمیث آن ر $> \frac{\dot{v}}{v} = (v)$

فإننا نجد قيمة ي بالتعويض في المعادلة (٧٠ - ٢)

• , YA9 =
$$\frac{\cdot, \circ}{\cdot, \vee} = \frac{7 - 7, \circ}{\cdot, \vee} = \frac{\frac{1}{\gamma} - (\frac{1}{\gamma} - \vee)}{\frac{1}{\gamma}} = \rho_{A7}$$
,

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

1,97 -= .,.vac

وبما أن قيمة ى تقع بين -١,٩٦، ١,٩٦ فإننا نقبـل الفرض (أي أن الـوزن الوسيط لمجتمع الطلاب يمكن أن يكون ٦٢ كيلوغراماً).

مئسال ۲:

اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٠ من الأطفال حديثي الولادة في مدينـة ما ووجد أن أوزانهم كها يلي بالكيلوغرام:

والمطلوب اختبار الفـرض القائـل بأن الـوزن الوسيط لـلاطفال عنـد الولادة في هذه المدينة لا يقل عن ٢,٥٠٠ كيلوغرام وذلك بمستوى معنوية ١٪.

الحسل:

نطرح القيمة ٢,٥٠٠ من جميع الأوزان ونسجل الفروق بالإضافة إلى إنساراتها كها يل:

. . Vo . + = Y, o . . - T, Yo.

·, o · · + = Y, o · · - Y, · · ·

· .00 · - = Y.0 · · - 1.40 ·

۲,0۰۰ - ۲,0۰۰ = صفر

· , 7 · · - = - · · · · - 1 , 4 · ·

. . £ . . + = Y, o . . - Y, q . .

., \ Y . - = Y, o . . - Y, TA .

· , 70 · + = 7 , 0 · · - 7 , A0 ·

. . q . . + = Y, o . . - T, E . .

·, 77 · + = 7, 0 · · - 7, VY ·

عدد الفروق التي إشارتها موجبة ر = ٦

عدد الفروق التي إشارتها سالبة ن-ر- ١= ٣ (حيث نهما, الفروق الصفرية) وحيث أن الاختبار ذو طرف واحد سفلي فإنه يمكن صياغته كها يلي:

Hه : و ≥ ۲,۵۰۰ کیلوغرام

H، : ، < ۲٫۵۰۰ کیلوغرام

وحيث أن الاختبار ذو طرف سفلي فإننا نجد قيمةي بالتعويض في (٧٥ ـ ٢ ـ ٧

$$v = \frac{(r - \frac{1}{r}) - \frac{4}{r}}{\sqrt{\frac{4}{r}}} = \frac{0, 0 - 0, 3}{0, 0 - 0, 3} = rrr, .$$

ومن جدول التوزيم المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

Y. YY - =

وبما أن قيمة ي أكبر من -٣,٣٣ فإننا نقبل الفرض H رأى أنه من المكن أن لا يقل الوزن الوسيط للطفل حديث الولادة في هذه المدينة عن ٢,٥٠٠ كيلوغرام).

مثمال ۲:

البيانات التالية تمثل الدخول الشهرية (بالدينار) لعينة عشوائية حجمها ١٦ من العاملين في إحدى الشركات

47 AE VI II AE VY IA 110 4. IY I.

311 ... YO FO PA

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن البوسيط لأجور العيال في هذه الشركة لا يزيد عن ٧٥ دينار وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحسل:

نطرح القيمة ٧٥ من جميع القيم المشاهدة ونسجّل الفروق مع إشارتها كما يلى: T. + = V0 - 1/0 10+ = V0 - 4. 1- = V0 - 77 10- = V0 - 7. A-=VO-TT A+=VO-AS Y-=VO-VY V-=VO-TSTV - 0V = +1 3A - 0V = +P - 0Y = +V/ 3// - 0V = +PT 1 = + = V0 - OY - OY - = V0 - OY - = V0 - OY - = V0 - V0 - V0 - V0

عدد الإشارات الموجبة ر = ٩

عدد الاشارات السالبة ن - ر = ٧

وحيث أن الاختبار ذو طرف واحد علوى فإنه يمكن صياغته كما يلي:

οΗ : و = ۵۷ دینار

Ht : و > ۷۵ دينار

وتحسب قيمة ي بالتعويض في المعادلة (٥٦ ـ ٢ ـ ٧) كما يلي:

$$0, Vo = \frac{VP + \frac{1}{V} - \frac{VP}{V} - \frac{VP}{V}}{\frac{VP}{V}} = 0, Vo = \frac{VP}{V}$$

ومن جدول التوزيم المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

ی ه و . = ۱,70

وبما أن قيمة ى المحسوبة أقل من 1,70 فإننا نقبل الفرض Ho (أي أنه من الممكن أن لا يزيد الوسيط لأجور العال في هذه الشركة عن ٧٥ دينار في الشهر).

ثانياً: حالة المجتمعين

يستخدم اختبار الإشارة في حالة المجتمعين لاختبار الفرض القائل بأن وسيط المجتمع الأول و يساوي وسيط المجتمع الثاني وه ولا يختلف الإختبار في هذه الحالة عن اختبار الوسيط لمجتمع واحد وسوف نين ذلك في المثال التالي:

مثسال ٤:

للراسة مستوى أثر دورة تدريبية معينة على مستوى إنتاجية العامل في إحدى الشركات اختيرت عينة عشوائية حجمها ٢٠ عاملاً وقيست إنتاجيتهم قبل وبعد الاشتراك في المدورة وكانت إنتاجيتهم (بالوحدة) كما يلي:

التغير في الانتاجية	الانتاجية بعد الدورة	الانتاجية قبل الدورة	رقم العامل
			<u> </u>
1+	٧	7	,
1+	0	٤	۲
صفر	Y	Y	٣
1+	4	٨	٤
1+	٦	٥	٥

التغير في الإنتاج	الانتاجية بعد الدورة	الانتاجية قبل الدورة	رقم العامل
۲ +	٨	1	٦
1+	11	1.	٧
صفر	A	A	٨
1 -	1	٧	4
1 -	A	4	1.
۱+	Y	٦	11
1+	٦	0	17
\ +	٥	٤	14
1 +	A	v	3.6
1 -	4	1.	10
Y +	11	4	17
1+	1.	4	17
\ +	4	A	14
<i>i</i> –	. 7	٧	14
Y +	14	1.	٧٠

والمطلوب اختبار صحة ادعاء القائمين عمل تنظيم همذه الدورة بـأنها تؤدي إلى تحسين مستوى إنتاجية العهال في هذه الشركة.

الحسل:

Ho: ور = وح

ا+ : و ≠ و

إذا كمان الن صحيحاً فمإننا نتوقع أن نحصل على عمد متساو من الإنسارات الموجبة والسالبة، وهمذا يعني أن احتمال الحصول على إنسارة موجبة أو إشارة سالبة يساوي ١/٧، ويناء على ذلك فإن عدد الإنسارات الموجبة التي يمكن أن نحصل عليها يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين (ن، ١/٧) وبالتالي فإن متوسط هذا التوزيع وتباينه هما

ن ع في على التوالي. ولاختبار Ho فإنه يمكن استخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدير من الدالة التالية:

$$(v-Y-0V) \qquad \frac{\frac{\dot{U}}{Y}-(\frac{1}{Y}-J)}{\frac{\dot{U}}{V}}$$

حيث ر عدد الإشارات الموجبة.

عدد الإشارات الموجبة ر = ١٤

عدد الإشارات السالبة ن-ر-٢= ٤

وبالتعويض في المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن:

$$Y, Y = \frac{1}{\sqrt{\frac{Y}{Y}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Y}{Y}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Y}{Y}} - \frac{1}{\sqrt{Y}} - \frac{1}{\sqrt{Y}}}{\sqrt{\frac{1}{X}}} = C$$

ومن جدول التوزيم المعتاد القياسي رقم (٣) فإن:

1.97 -= -. ...

ي،١,٩٦ = ٠,٩٧٠

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين – ١,٩٦ + ١,٩٦ فإننا نرفض الفـرض (أي أن ادعاء القائمين على الدورة بأنها ترفع مستوى انتاجية العيال صحيح).

(£ ـ ۲ ـ ۷) اختبار ∪ لمان ـ وتني:

لقد تحدثنا في اختبار الإشارة عن العينتين غير المستقلتين، أما إذا كانت العينتان مستقلتين فإنسا نستطيح أن نستخدم المحتبارا آخر غير معلمي وهو اختبـار U لمـان ــ وثني، وإجراء هذا الاختبار لا يتطلب أن يكون مجتمعا الدراسة معتادين.

مشال ۱:

لدراسة الفروق بين أجور العمال في شركتين من شركات النسيج اختار بـاحث عينة عشوائية من العاملين في كـل منها وحصـل من هاتـين العينتين عـلى البيـانــات التالية:

أجور العيال في الشركة .	بور العمال في الشركة أ
170	7.
178	10.
44	4+
Y.0	٧1٠
47	77
Α£	7A
120	14.
18*	110
17.	144
140	731
144	

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسط الأجور في الشركة أ يساوي متوسط الأجور في الشركة ب وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

: الحبل:

oH : متوسط الأجور في الشركة الأولى يساوي متنوسط الأجنور في الشركة الثانية.

الشيط الأجور في الشركة الأولى لا يساوي متوسط الأجور في الشركة الثانية.

يتضمن اختبار مان ـ وتني لهذا الفرض اتباع الخطوات التالية:

 ١ ـ ترتيب القيم في العينتين ترتيباً تصاعدياً، وإعطاء كل قيمة رتبة من الأصغر فالأكبر كها هو مين في الجدول التالي:

الرتبة	أجور عيال الشركة (ب)	الرتبة	أجور عيال الشركة (أ)
17	170	1	7.
13	371	18	10.
7	47	٥	4.

الرتبة	أجور عمال الشركة (ب)	الرتبة	أجور عيال الشركة (أ)
٧٠	Y.0	71	۲۱۰
٧	47	Y	٧٦
٣	A£	٤	٨٦
۱۳	150	4	17.
11	18.	A	110
10	17.	١.	177
1.4	140	14	187
19	147		
180 = 4	۴	= 7A	مجموع الرتب م١

٢ - تجميع رتب مشاهدات العينة الأولى وليكن هذا المجموع م، وتجميسع رتب مشاهدات العينة الثانية وليكن هذا المجموع م، (م، = ٨٦، م، = ١٤٥).

٣_ التعريض في صيغة اختبار مان ـ وتني التالية:

$$U = \dot{\omega}_{i} \dot{\omega}_{y} + \frac{\dot{\omega}_{i} (\dot{\omega}_{i} + 1)}{\gamma} - \gamma_{i} \qquad (Ao - Y - V)$$

حيث ن، حجم العينة الأولى، ن، حجم العينة الثانية

وإذا اخترنا المعادلة (٥٨ ـ ٢ ـ ٧) فإن)

$$150 - \frac{(1+1)11}{r} + 11 \times 1 = r U$$

إيجاد القيمة المتوقعة والتباين الاختبار مان ـ وتني كها يلي:

$$\frac{(0,0)}{(0,0)} = \frac{(0,0)}{(0,0)} = \frac{(0,0)}{($$

/•1,77 = | \{.\} = \u0

ه ـ إذا كانت ن، ك ن، > ٨ فإن ل تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بالتوقع والتباين
 الميتين في الخطوة السابقة، أي أن المقدار:

ی =
$$\frac{(V) - - U)}{v_0}$$
 = که توزیم معتاد قباسی

وبالتعويض في (٦٠ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن:

ى =
$$\frac{78 - 00 - 71}{18,7} = -97را حيث ٣١ هي قيمة U م$$

٦ _ من جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

وحيث أن قيمة ى المحسوبة في الخطوة ٥ لا تقع بين هاتين القيمتين فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط الأجور في الشركة الأولى لا يساوي متوسط الأجور في الشركة الثانية).

(ه ـ ۲ ـ ۷) اختبار H لكروسكال ـ والاس:

يعتبر اختبار كروسكال ـ والاس امتداداً لاختبار مان ـ وتني ويستخدم لاحتبار ما إذا كانت مجموعة من العينات المستقلة تنتمي إلى مجتمعات متماثلة، ويشبهه من حيث التطبيق كها هو موضح في المثال التالي :

مثال ١:

لدراسة الفروق بين متوسطات الانفاق السنوي (بالدينار) على الملابس في ثلاث مدن اخترنا عينة عشوائية من الأسر في كل منها فحصلنا على البيانات التالية:

الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة جـ	الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة ب	الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة أ
10.	15.	17.
14.	170	17.
14.	48.	***
70.	۳۸۰	47.
14.	***	٧1.
44.	To .	

والمطلبوب اختبار الفرض القاثل بأن متوسطات الانفياق السنوى عبلي الملابس للأسرة الواحدة في المدن الثلاث متساوية وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحيل:

Ho : متوسطات الانفاق السنوي على الملابس لللأسرة الواحدة متساوية في المدن الثلاث.

Ht : متوسطات الانفاق السنوي على الملابس للأسرة الواحدة غير متساوية في المدن الثلاث.

ولاختبار هذا الفرض تتبع الخطوات التالية:

١ _ كها في حالة مان _ وتني نقوم بترتيب المشاهدات في العينات الثلاث تصاعدياً ثم نعطيها رتباً كما في الجدول التالي:

المدينة (ج)		المدينة (ب)		المدينة (أ)	
الرتبة	الشامدة	الرتبة	الشامدة	المرتبة	الشامدة
٣	10.	۲	18.	١ ،	17.
٦	14.	٥	170	٤	17.
٨	14.	14	45.	10	*7*
18	70.	۱۸	44.	17	77.

٢ - تجميع رتب المشاهدات في كل من العينات الثلاث ولتكن هذه المجاميع م، ك
 م ع ك م على التوالي (م، = ٤٧ ك م ع = ٥٦ ك م ع = ٥٩).

٣ .. التعويض في صيغة اختيار كروسكال ـ والاس التالية:

$$=\frac{\gamma t}{\dot{\upsilon}\left(\dot{\upsilon}+t\right)}\left(\frac{\dot{\gamma}_{t}^{\gamma}}{\dot{\upsilon}_{t}}+\frac{\dot{\gamma}_{t}^{\gamma}}{\dot{\upsilon}_{\tau}}+\frac{\dot{\gamma}_{\tau}^{\gamma}}{\dot{\upsilon}}\right)-\gamma\left(\dot{\upsilon}+t\right)\quad\left(1T-\gamma-\gamma\right)$$

حيث ن، حجم العينة الأولى

ن، حجم العينة الثانية

ن- حجم العينة الثالثة

21 10

$$\dot{G} = \dot{G}_f + \dot{G}_7 + \dot{G}_7$$

$$\therefore H = \frac{\gamma \ell}{\Lambda \ell \left(\Lambda \ell + \ell\right)} \left(\frac{V3^{\gamma}}{\circ} + \frac{\circ \Gamma^{\gamma}}{\ell} + \frac{\rho u^{\gamma}}{V}\right) - \gamma \left(\Lambda \ell + \ell\right)$$

•, \v = H ∴

إذا كمان الله صحيحاً، ن،، ن، ن، > ٥ فمإن الا تتبع توزيع كمأي توبيع
 بدرجات حرية ٢ ـ ١ حيث ٣ عدد العينات.

٥ ـ من جدول كاي تربيع (جدول رقم (٤)) نجـد:

0,991 = ... 6 7x

وحيث أن قيمة ½ المحسوبة في الخطوة ٣ أقـل من ٩٩١، ٥ فإنـــا نقبل الفـرض (أي أن متوسطات الانفــاق السنوي عــل الملابس لــلأسرة الواحــدة متساويــة في المدن الثلاث).

أسئلة وتمارين (٧)

(١ - ٧) اختيرت عينة عشوائية حجمها ٢٥ أمرة من بين الأمر التي تسكن في
 منطقة معينة، وقد تبين أن التوزيع التكراري للدخل الأسبوعي في
 العينة كما يل:

علد الأسر	نثات الدخل الأسبوعي بالدينار	
۴	70.	
٥	٧٠ - ٦٠	
17	۸۰ -۷۰	
٤	4 4.	
1	1 4 .	
40	المجسوع	

فإذا علم أن الدخل الأسبوعي يتبـع التوزيــع الطبيعي بتــوقع 4 وتبــاين ٣

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن متوسط الدخل الأسبوعي في هذه المنطقة يساوى ٧٥ ديناراً.

(۲-۷) شركة لانتاج المسامير الفولاذية لديها آلات لانتاج مسامير متوسط طولها
۱۰۰ ملليمتر. ولاختبار مدى مطابقة إنتاج هذه الآلات للمواصفات المطلوبة قام باحث باختيار عينة عشوائية حجمها ۱۳۰ مسياراً، فإذا
وجد أن متوسط طول المسيار في هذه العينة هو ۱۰۷ ملليمتر وإذا علم
من دراسات سابقة أن تباين أطوال المسامير من إنتاج هذه الآلات هو ۳
(ملليمتر) اختبر صحة ادعاء الشركة بأن المسامير المنتجة مطابقة
للمواصفات المطلوبة.

(٣-٣) تقتضي شروط تصدير البيض من إنتاج مزرعة ما أن يكون وزن البيضة ٩٥ غراماً. فإذا اختار باحث عينة حجمها ١٠٠ بيضة من الكميات المعدّة للتصدير ووجد أن متوسط وزن البيضة في هذه العينة هو ٩٢ غراماً، فإذا يمكن القول عن مطابقة هذه الشحنة لشروط التصدير علماً بأن تباين وزن البيضة من إنتاج هذه المزرعة هو ٩٥ (غم) ٩٠

(٤ - ٧) لاختبار مدى الترام غيز بمواصفات وزارة التموين اختار مفتش التموين عينة عشوائية من إنتاج هذا المخبز حجمها ١٢٠ رغيفاً ووجد أن متوسط الموزن وتباينه في هذه العينة يساويان ١٧٥ غرام، ٣٦ (غرام) عمل التوالي، اختير بمستوى معنوية ٥٪ صحة ادعاء المخبز بتقيده التام بتعليهات الوزارة التي تنص عمل أن لا يقل وزن السرغيف عن ١٧٧ غرام.

(٥ - ٧) تمتلك شركة أحذية ألة لصب كعوب الأحذية النسائية البلاستيكية، فإذا كانت الموصفات تتطلب أن يكون متوسط وزن الكعب ١٢٠ غراماً، اختير بمستوى معنوية ٥٪ مدى مطابقة الكعوب المنتجة للمواصفات المطلوبة إذا علم أن متوسط وزن الكعب لعينة عشوائية حجمها ٢٥ كمباً هو ١٢٥ غم والانحراف المعياري لوزن الكعب في هذه العينة هو ٥ غم

(V - 1)

(V - V)

لدراسة أثر إضافة مادة كياوية معينة على الأسمنت لزيادة قدرة الطوب الاسمني على التحمل، تم اختيار عينة عشوائية حجمها ٣٦ طوبة من تلك المصنوعة من الاسمنت المعالج بالمادة الكيهاوية. فإذا وجد أن متوسط قدرة الستمتر المربع الواحد في هذه العينة على تحمل الضغط هو ٢٧ كيلوغرام والانحراف المياري للقدرة على التحمل هو ١٠٥ كيلوغرام، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ صحة ادعاء الشركة المتنجة لهذه المادة الكياوية بأنها تزيد من قدرة الطوب الاسمنتي على تحمل الضغط، إذا علم أن قوة التحمل قبل المعاجلة هي ٢١٠٥ كيلوغرام.

لمعرفة أشر نوع معينَ من الأعلاف على إنتاج الأبقار من الحليب، تم اختيار عينة عشوائية من هذه الأبقار حجمها ١٠ وسجل إنتاجها اليومي

قبل وبعد اعطائها الاعلاف وكانت النتائج كما يلي:

-		
الانتاج اليومي من الحليب بعد إعطائها الأعلاف الجديدة	الانتاج اليومي من الحليب قبل اعطاتها الأعلاف الجديدة	البقرة
١٨,٥	14	1
Y1	Y .	۲
1.	19,0	۳
**	*1	٤
1.4	14	٥
۱۸,0	19	٦
77	77	٧
Y •	14,0	Α
74	77,0	4
77	71,0	1.

الحتسر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القـائل بـأن الأعلاف الجـديدة تـزيد الانتاج اليومي من الحليب.

- (٧-٨) إذا كان عدد شهادات الدراسة الثانوية العامة وما فوق، في عينة عشوائية حجمها ١٢٠ شخصاً من بين العاملين في شركة معينة، هو ٤٠ اختبر بمستوى معنوية ١٪ الادعاء الذي ورد في تقرير دائرة الأبحاث والدراسات في هذه الشركة والذي يقول بأن نسبة حملة شهادات الدراسة الثانوية العامة وما فوق لا تقل عن ٣٦٪ في هذه الشركة.
- (٩ ٧) لدراسة نسبة المدخنات بين السكان الإناث في مدينة ما اخترنا عينة ٥٠، عشوائية حجمها ٢٠٠ فإذا كان عدد المدخنات في هذه العينة ٥٠، اختير بمستوى معنوية ٥/ الفرض القائل بأن نسبة المدخنات في هذه المدينة لا تزيد عن ٢٠٪.
- (١٠ ٧) بين ما إذا كنت تقبل أو تىرفض الفرض التالي بناء عبل المعلومات
 المعطاة:

الفرض H : ملہ = ہمہ بµ ≠ ہد : مل

أ - حجم العينة الأولى (مأخوذة من المجتمع الأول) = ٢٠٠ مفردة.
 ب - حجم العينة الثانية (مأخوذة من المجتمع الثاني) = ٥٠٠ مفردة.

جــ متوسط العينة الأولى = ٢٨ ديناراً.

د_ متوسط العينة الثانية = ٢٩ دينار

هـ تباين المجتمع الأول = تباين المجتمع الثاني = ٤ (دينار)٠.
 و ـ مستوى المعنوية = ٥٪.

(١١ - ٧) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٥ ـ ٦) وتحت نفس الفروض:

 ١- اختير بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن متوسط دخل الأسرة
 في الحي الشاني لا يقل عن متوسط دخل الأسرة في الحي الأول إذا
 علم أن تباين دخبول الأسر في الحي الأول يساوي تباين دخبول الأسر في الحي الثاني.

٢ _ إذا علمت أن تباين دخول الأسر _ في المدينة ككل _ يساوي ٢٥٠ ديناراً مربعاً، اختبر الفرض القائل بأن متوسط دخل الأسر في همذه المدينة يساوي ٥٠ ديناراً.

٣_ أوجد احتيال الخطأ من النوع الثاني في الاختبار المشار إليه في ٢ في
 الحالتين التاليتين:

إذا كان متوسط الدخل الشهيري للأسرة في المدينة يساوي
 وينارأ.

ب_ إذا كان متوسط الدخل الشهيري للأسرة في المدينة يساوي
 ٥٣ ديناراً.

(١٢ - ٧) بائم تفاح بالجملة يدعي أن ما يورده من هذه الفاكهة لا يحتوي على أكثر من الجمال المنافقة. فإذا أخذت عينة حجمها ١٠٠ تفاحة ووجد فيها ٣٦ ثمرة تالفة، اختبر صحة ادعاء البائع بمستوى معنوية ١٪.

١٢ ـ ٧) إذا تقدم ٤٩٠ طالباً و ٤٥٠ طالبة لامتحان في مستوى اللغة العربية
 وحصلنا من علاماتهم على النتائج التالية:

متوسط علامات الطلاب ٣, ٥٤ والانحراف المعياري لعلاماتهم ١٧,٥

متوسط علامات الطالبات ٢, ٥٠ والانحراف المعياري لعلاماتهن ١٨. فهل بوجد فرق (بستوى معنوية ٥٪) بين عالامات الطلاب وعلامات

الطالبات، إذا علم أن تباين علامات الطلاب وتباين علامات الطالبات

مشكل عام متساويان؟

(١٤) مستورد يكنه استيراد نوعين من اللمبات الكهربائية، وقبل أن يتخذ قراراً بالاستبراد قام باختبار ثلاث لمبات من كل نوع لمعرفة متموسط عمر اللمه وحصل منها على النتائج التالية:

عمر اللمبة (بالمائة ساعة) من النوع الثاني	عمر اللمية (بالمائة ساعة) من النوع الأول
Yo	۲٠
**	19
*1	*1

فهل يمكن الحكم (بمستوى معنوية ٥٠,٥٥) بأن متوسطى العمر متساويان للنوعين الأول والثاني؟

- (٧- ١٥) تم يد مؤسسة الإذاعة والتلفزيون معرفة آراء المساهدين في برنامج تلفيزيوني معين واختارت لهذا الغرض عينة عشوائية من الراشدين حجمها ٤٠٠ شخصاً وأخرى من الراهقين حجمها ٦٠٠ شخصاً. فإذا أشار ١٠٠ راشد و ٣٠٠ سراهق إلى أنهم يحبون السرنـامـج المـذكـور، اختبر بمستوى معنوية ٥/ الفرض القائل بأن نسبة المراهقين اللذين يحبون البرنامج أكبر من نسبة الراشدين.
- (١٦ ـ ٧) وجد محل تجاري أن متوسط مبيعاته اليومية خلال ٢٥ يوماً من نوع معين من الأدوات الكهربائية هو ٣٢٠ وحملة والانحراف المعياري لحجم المبيعات هو ٤٠ وحدة. وبعد القيام بحملة إعلانية مكثفة وجدت الإدارة أن متوسط حجم المبيعات من هـذه السلعة خـــلال ٢٥ يومــأ هو • ٣٥ وحدة والانحراف المعياري ٦٠ وحدة. اختيم بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن حجم الميعات قبل الحملة الإعلامية أكبر من أو يساوى حجم المبيعات بعد الحملة الإعلانية (اعتبر أن تبايغ حجم المبيعات اليومية قبل الحملة وبعدها متساويان

(١٧ ـ ٧) شركة تملك مصنعين لإنتاج المصابيح الكهربائية، ولـدراسة الفـرق بين

متوسط مدة خدمة مصباح من إنتاج هدين المصنعين اختبرت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ مصباحاً من إنتاج المصنع الأول وعينة عشـوائية ثانية حجمها ٨٠ مصباحاً من إنتاج المصنع الثاني، فإذا وجد أن متـوسط مدة خدمة المصباح من العينة الأولى يساوى ١١٨٠ ساعة ومتوسط مدة خدمة المصباح من العينة الثانية يساوى ١٢٠٠ ساعة وإذا علم أيضاً من خبرة سابقة أن تباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول يساوي ٣٦٠٠ (ساعة) وتباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثاني يساوي ٤٠٠٠ (ساعة) ، اختير بمستوى معنوي ١٠٪ صحة ادعاء إدارة المبيعات في هذه الشركة بأن متوسط مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول يساوي متوسط مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثـاني، ثم اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفـرض القائـل بأن الفـرق بين متوسط مدة خدمة المصباح من المصنع الأول ومتوسط مدة خدمة المصباح من المصنع الثاني أكبر من أو يساوي ١٥ ساعـة (٣٠ − ١٠٠ ≥ .(10

لدراسة متوسط وزن الطفل عند الـولادة حــب الجنس، اخترنـا عينتين عشوائيتين الأولى من المواليد الـذكور حجمهـا ١٦ مولــوداً وجد منهـا أن متوسط الوزن س ، = ۲۹۰۰ غم وتباين الوزن ع٪ = ۲۵۰۰ (غـرام) والثانية من المواليد الإناث حجمها ١٢ مولوداً وجد منها أيضاً أن متوسط الــــوزن س ٧ = ٣٠٠٠ غرام وتباين الوزن ع ۗ = ٣٦٠٠ (غــرام) ٢ . فإذا علم أن تباين وزن الذكور عند الـولادة يساوي تبـاين وزن الإناث عنــد الولادة، اختبـر بمستوى معنوية ٥٪ أن متوسط وزن الذكور عند الولادة أقل من وزن الإناث عند الولادة.

(١٩ ـ ٧) لمعرفة تأثير عـلاج معينٌ عـلى ضغط الدم المرتفع اخـترنا عيـنـة عشوائيــة حجمها ١٠ مرضى وسجلنا لهم ضغط الدم قبـل وبعد تعـاطي العلاج

ضغط الدم بعد العلاج	ضغط الدم قبل العلاج	المريض
17.	14.	1
17*	۱۸۰	*
100	17.	٣
14.	140	٤
18.	10.	٥
170	1.4.	٦
17.	140	٧
140	14.	
14.	190	4
14.	Y • •	١.

والمطلوب: اختبار ما إذا كان لهـذا العلاج أشر في تخفيض ضغط الدم بمستوى معنوية ١٨.

(۲۰ – ۷) قررت إحدى الوكالات شراء عدد من شاشات التلفزيون من نوع معين، واشترطت لإتمام هذه الصفقة أن لا يزيد تباين مدة خدمة الشاشة من هذا النوع عن ٤٠٠ (ساعة). فإذا اختار باحث عينة عشوائية حجمها ٣٠ شاشة ووجد أن تباين مدة الخدمة في هذه العينة يسلوي ٥٠٠ (ساعة). فهل تنصح الوكالة بإتمام عملية الشراء؟

(٢١ _ ٧) الجدول التالي يبينٌ مدة الحدمة (بالساعة) لنوع من لمبات التلفزيون

التكسرار	مدة الخدمة (بالساعة)
٤	-17
A	-18
14	-17-
۳۰	-14
**	-4
14	-77
٦	7778
1	المجمسوع

فإذا علم أن مدة الخدمة تتبع التوزيع المعتاد، اختبر بمستوى معنسوية ٥٪ الفرض القائل بأن تباين مدة الخدمة بساوى ٩٠٠٠ (ساعة)*.

(۲۲ - ۷) بالرجوع إلى التمرين (۲۱ - ۷)، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض
 القائل بأن الإنحراف المعيارى لمنة الخدمة يساوى ٣٠٠ ساعة.

(۲۲ - ۷) تدعى شركة لإنتاج الأسطوانات الفولاذية أن تباين نصف القطر للإسطوانات المنتجة لا ينزيد عن ٢٠٠٠، انش، فإذا اختبر عينة عشوائية حجمها ١٠ اسطوانات من إنتاج هذه الشركة ووجد أن تباين نصف القطر لهذه العينة يساوي ٢٠٠٠، انش، اختبر بمستوى معنوية ١٪ صحة ادعاء الشركة.

(٢٤ - ٧) يدعي قسم المبيعات في شركة الإنتاج مساحيق الفسيل أن تباين الوزن في العلب ذات الوزن ثلاثة كيلوغرامات لا يزيد عن ٢٠,٠ كيلوغرام. فإذا وجد أن تباين الوزن في عينة عشوائية حجمها ٨ علب يساوي ٨٠,٠ ٨ اختبر بمستوى معنوية ١٪ صحة إدعاء هذه الشركة.

(٧ - ٧) البيانات التالية تين النفقات الشهرية على الإعلان (س) بالدينار وحجم
 المبيعات (ص) بالوحدة من سلعة ما خلال عشرة أشهر:

20.
70.
0 * *
£ 0 °
£A+
78.
7
34.

وقق علاقة خطية بسيطة بين النفقات (س) وحجم المبيعات (ص)
 إ ـ الختبر جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

٣ ـ قدر حجم المبيعات عندما تكون النفقات الشهرية للإعلان ٧٥٠ دبناراً.

٤ ـ احسب كالاً من التفاوت الكلي والتفاوت المفسر والتفاوت غير
 المفسر .

٥ _ قدّر تباين النموذج الخطي البسيط.

٦- اختبر الفرض القائل بأن أ = صفر وذلك باستخدام توزيع
 ستبودنت (ت) ويستوى معنوية ٥٪.

(٢٦ ـ ٧) إذا كان المتغيران س6ص يرتبطان بالعلاقة التالية

ص = ١، + ١١س + ١١١٠ + خ

وإذا كان لدينا البيانات التالية:

ص	س
7	1

•

-

٥

١ _ قلّر المعالم أ. ٤ ١/ ٤ أ بطريقة المربعات الصغرى

٢ _ كون فترة ثقة ٥٥٪ لكل من أ، 6 أم

٣ _ كون فترة ثقة مشتركة ٩٥٪ للثابتين أ، ٤ أ،

٤ _ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن أ. = صفر

ه ـ كوّن جدولًا لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٠٪.

(٧٧ ـ ٧) ﴿ إِذَا اخترَانَا عَسُوائِياً ٢ أَسر من تلك التي تقطن في منطقة ما وحصلنا منها على المعلومات التالية :

١ ـ وقَق النموذج الخطي البسيط ص = أس + ب + خ

 ٢ - اختبر بمستوى ٥/ جودة ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين الدخل السنوي (س) والنفقات السنوية على الإنتقال والعلاج.

٣ _ قدر كلا من أكاب بفترة ثقة ٥٩٪.

٤ _ قلر الثابتين أكب بفترة ثقة مشتركة ٩٠٪.

٥ _ اختبر بمستوى معنوية ١٠٪ الفرض القائل بأن أ = صفر

التفقات السنوية على الانتقال والملاج (ص)	الدخل السنوي بثات الدثاتير (س)	الاسرة
٣	٧	1
٤	11	۲
٥	1.	۳
٣	17	٤
V	1A	٥
A	4.	٦

في دراسة لمعرفة العلاقية بين درجة ميل الأطفيال (ص) لنوع معين من المصير حسب عنوياته (س،) ودرجة حلاوته (س،) حصلنا على المعلومات التالية:

س۲	س١	ص	الطفل
٤	٣	70	1
٨	٣	۸٠	۲
٤	٥	٧.	٣
٨	٥	9.	٤
٤	٧	Ao	٥
٨	٧	90	٦.

فإذا افترضنا أن العلاقة بين ص والمتخبرين س، 6 س، هي النموذج الحطي العام

$$\{ \cdot, \cdot \circ = \alpha \}$$
 و القائل بأن $\{ \cdot, \cdot \circ = \alpha \}$ و القائل بأن $\{ \cdot, \cdot \} = \alpha \}$ و القائل بأن $\{ \cdot, \cdot \} = \alpha \}$

(٢٩ ـ ٧) بالرجوع إلى تمرين (٢٢ ـ ٦):

اختم الفرض أ = صفر عستوى معنوية ٥٪.

اختبر الفرض أ ≥ صفر بمستوى معنوية ٥٪.

(۳۰ - ۷) بالرجوع إلى تمرين (۲۳ - ٦):

١ _ اختبر الفرض أ. = صفر بمستوى معنوية ١٪

٢ _ اختبر الفرض أب = صفر بمستوى معنوية ١٪

(٣٦ - ٧) البيانات التالية تمشل ١٠ صناديق من المواد الغذائية المعلبة الواردة إلى بقالة معينة مصنفة حسب عدد العلب في كمل صندوق (س،) ووزن المسئلوق (س،) ودقائق العمل اللازمة الإدخالها إلى المخزن (ص)

الصندوق	عدد العلب في	وزن الصندوق (س٦)	دقائق العمل (ص)	
	الصندوق (س١)	بالكيلوغرام		
1	٧٠	٥٠	70	
4	10.	11.	٧٥	
٣	٤٠	٣٠	10	
٤	17.	4.	7.	
٥	11.	Ao	0,*	
٦	٣٠	70	10	
v	***	7	11"*	
A	7.	T 0	٧.	
4	18.	1.0	٧٠	
1.	٤٠	**	١٨	

ا _ وفق النموذج الحطي ص = أ. + أ $_1$ س، + أ $_2$ س، + خ للبيانات المطاة.

۲ _ اختبر كلاً من الفروض التالية بمستوى معنوية ٥٪. أ، = صفر أب = صفر
 ٣ _ معنوية ٥٪ جودة مطابقة النموذج المحدد في ١.

(٣٣ - ٧) بالرجوع إلى تمرين (١٨ - ٦)، الحتبر بمستوى معنوية ١٪ جـودة مطابقة
 النموذج الخطي البسيط للبيانات المطاة.

- (٣٣ ٧) بالرجوع إلى تمرين (٣٣ ٦)، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ جــودة مطابقــة النموذج الخطي العام للبيانات المعطاة.
- ٢- ٣٤) بالرجوع إلى تمرين (٩ ٤) وفن توزيع بواسون لعدد الآلات التي توقفت عن العمل في اليوم ثم اختبر جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.
- رسط معدود معدود مدر المراجع ا
- (٣٦ ـ ٧) الجدول التالي يبين توزيع عدد الأطفال الذكور في ١٠٠ أسرة كل منها

عدد الأطفال الذكور عدد الأسر						
	•					
14	1					
۳.	٧					
40	٣					
10	٤					
1.	٥					

والمطلوب توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات واختبـار جودة المـطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

(٧- ٢٧) الجدول التكرار التالي بيين تـوزيع الأجـور الأسبوعية لـ ١٠٠٠ شخص
 من العاملين في إحدى المؤسسات الصناعية .

عدد العاملين	فثات الأجر الأسبوعي بالدينار
٥٠	T+ _ Y+
10.	٤٠ ـ ٣٠
7	0 = 2 5 +
Yo	7 - 0 -
14.	٧٠ ـ ٦٠
14.	۸۰ _ ۷۰
£ •	4 4.
1.	1 9 .
1	المجموع

والمطلوب توفيق التوزيع الطبيعي لهذه البيانات واختبـار جودة المطابقة بمستوى معنوبة ٥٪.

(٣- ٣٨) إذا كان معامل الإرتباط المحسوب من عينة حجمها ٢٥ من أزواج متناظرة (س٤ص) هو ٤٠,٥، اختجر الفرض القائل بأن معامل الإرتباط بين مجتمعي س٤ص يساوي صفراً.

(٣٩ ـ ٧) بالرجوع إلى تمرين (٤١ ـ ٦)، اختبر الفرض القائل بأن معامل الإرتباط بين طول الطالب ووزنه في الجامعة الأردنية يساوى ٧٥.٠.

(* 5 - ٧) بالرجوع إلى تمرين (* 5 - ٦)، اختبر الفرض القائل بـأن معاصل ارتباط برسون بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار الجملة لأسعار مجموعة المسلم خلال السنوات ١٩٧٥ - ١٩٨٤ لا يزيد عن ٨٥. °.

(١٤ - ٧) الجمدول المزدوج التالي يبين تـوزيع ٤٠ شخصـاً حـــب أعمارهم وعمـر الابن الأكر لكار منهـه:

70-00		00 _ 10	\$0 _ 40	To _ To	عمر الأب (س)
					عمر الاين (ص)
		١	١	۲	17-1.
,	١	٥	٧	١	7/ = 3/
,	۲	0	1.		17-18
,	۲	٣			17 = 11

احسب معامل ارتباط بيرسون بين عمر الأب (س) وعمر الابن الأكبر (ص)، واختبر بمستوى معنوية ٥٪ أن معامل الارتباط بين أعهار الأباء وأعهار أكبر الأبناء لا يقل عن ٤٠٠٠.

(٤٢ ـ ٧) فندق معين لديه غرف بالأسمار (عال، متوسط، منخفض) وصاحب الفندق يعلن عن خدمة ممتازة في جميع الغرف، فإذا أخذت عينة عشوائية من ضيوف هذا الفندق وكانت آراؤهم في مستوى الخدمة، حسب أسعار الغرف، كها هو مين في الجلول التالى:

١ _ اوجد النوال لمسوى الحدمة

٢ _ احسب معامل التوافق بين مستوى الخدمة وسعر الغرفة

٣ - اختبر الفرض الفائل بعدم وجود علاقة بـين سعر الغـرفة ومستـوى
 الخدمة

المجموع	متخفض	متوسط	عال	لغرفة	سعر اا	
سبس	U	·		ع الحدمة	مستوى	
٥٠	1.	70	10		ممتاز	
1	10	70	٧.		جيد	
۲۰	٥	٧٠	٥		رديء	
14.	۳٠	11.	٤٠	٤	المجمو	
		زدوج التالي:	لجدول الم	ن لدينا ا	إذا كا	(Y = EY)
		المجموع	س٧	س۱	س	
					ص	
		٤٠	1.	۳٠	ص۱	
		7.	٤٠	*	ص٠	
		1	٥٠	٥٠ و	المجموخ	

اختبر الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغيرين سهص

(٤٤ ـ ٧) إذا كان لدينا الجدول المزدوج التالى:

س	س١	س٠	ص٠	المجموع
ص				
ص	٩	٥٤	٥٧	17.
ص۲	- 11	77	23	٨٠
المجموع		٨٠	1	7

احسب قيمة χ² واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القمائل بـاستقلال المتغيرين سكص

(٧- ٤٠) في دراسة عن عادات التدخين في مدينة كبيرة أخلت عينة عشوائية بسيطة مكوّنة من ١٠٠ مدخن وسجلت البيانات المتعلقة بالدخل الشهري للمدخن وصنف السجائر الذي يدخنه في الجدول المزدوج التالى:

صنف السجائر

فتات الدخل الشهري بالدينار	1	ب	*	المجموع
أقل من ٥٠	٧	Y	٦	10
1 * * - 0 *	1.	YA	YV	70
۱۰۰ فأكثر	٨	1.	۲	٧.
المجموع	Yo	٤٠	To	1

والمطلوب اختبار الفرض القائل باستقالال صنف السجائر الـذي يستهلكه المدخن عن مستوى دخله وذلك بمستوى معنوية ه/.

(2 - ٧) منتج سينهائي يريد أن يقوم بحملة دعائية لفيلمه الجديد، وقبل المباشرة بهذه الحملة اختار عينة عشوائية من مختلف الأعمار ودعاهم إلى عرض خاص لكي يعرف ما إذا كان هذا الفيلم يجتذب فئات معينة من العمر أم لا، وبعد سؤال هؤلاء عن أعمارهم ورأيهم في الفيلم المذكور حصل المنتج على البيانات المبوبة في جدول التوافق التالي:

الرأي	أقل من ٢٠	44 - 4+	09 - 10	٦٠ فأكثر
احبوا الفيلم	187	٧٨	£A.	۳۸
لم يحبو الفيلم	0 \$	٥٢	23	**
محايدون	Y+	٧٠	4	٨

فها هو اقتراحك بالنسبة لتنظيم هذه الحملة الدعائية؟

(٧- ٤٧) الجدول التالي يبين توزيع ٣٠٠ مستخدم في إحدى المؤسسات الحكومية حسب مستوى التعليم والصحيفة اليومية التي اعتاد على قراءتها:

الصحيفه	1	ب	-
مستوى التعليم			
ابتدائي	71	11	17
اعدادي	23	09	01
ثانوي	1.4	77	T1
جامعي	٣	٤	٦

والمطلوب اختبار الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين الصحيفة ومستوى التعليم بمستوى معنوية 1٪.

لدراسة العلاقة بين مستوى تعليم الأب ومستوى تعليم الأم اخترنا عينة عشوائية حجمها ١٠ أبناء ورتبناهم حسب مستوى تعليم الأب ومستوى تعليم الأم فحصلنا على التنالج التالية:

مستوى تعليم الأم	مستوى تعليم الأب	رقم الأبن
*	4	1
۲	٤	٧
٤	7	٣
1	٣	٤
٧	0	٥
٥	1	٦
1.	V	٧
	4	٨
4	1.	4
V	A	1.

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجـد ارتباط بـين مستوى تعليم الاب ومستوى تعليم الأم (اعتبر α - ۲، °).

(٤٩ ـ ٧) اختار باحث اجتهاعي عينة عشوائية حجمها ٨ من طالبات أحد المعاهد المتوسطة وقام بترتيبهن حسب ملابسهن ومستوى ذكائهن فحصل على النتائج التالية:

مستوى الذكاء	مستوى الملابس	رتم الطالبة
Y	۳	1
1	٤	۲
٣	٦	٣
٤	0	
	Y4 V	

مستوى الذكاء	مستوى الملابس	رقم الطالبة
ō	٧	0
Y	١	7
٨	۲	٧
7	A	A

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجود علاقة طردية بين مستوى الملابس ومستوى الذكاء.

(٥٠-٧) لدراسة العلاقة بين مدة الخدمة ومستوى الأداء في إحدى الشركات اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٢ شخصاً من موظفي هذه الشركة ورتبوا حسب عدد سنوات الخدمة ومستوى الأداء لكل منهم، فكانت النتائج كها يل:

الترتيب حسب	الترتيب حسب عدد	رقم الموظف
مستوى الأداء	سنوات الخدمة	•
٥	٤	1
٣	٣	۲
٦	٧	٣
٤	A	٤
٧	1.	٥
١.	11	٦
1	٣	٧
٣	١	A
A	•	4
1 4	7	1.
11	4	11
11	1.4	17

اختم بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائـل بوجـود علاقـة عكسية بـين الترتيب حسب عدد سنوات الخدمة والترتيب حسب مستوى الأداء. (٥-٧) للتعرف على التوزيع الإحتالي لسعر البندورة خلال فصل الصيف، راقب باحث الأسعار في سوق الخضار المركزي خلال ١٢ يوماً فكانت الأسعار في هذه الأيام للكيلوغرام كها يل بالفلسات:

والمطلوب اختبار الفرض القبائيل بـأن السعـر الـوسيط هـو ٦٠ فلس للكيلوغرام الواحد.

(٧-٥٢) إذا كانت الأرقام التالية تمثل عينة حجمها ١٠ مختارة عشوائياً من مجتمع معين

1767867.61867676861.6867

فإن المطلوب هو اختبار الفرض القائل بأن الوسيط لهذا المجتمع لا يزيد عن ١٠

(٥٣ - ٧) إذا كان الاستهلاك الشهري من الكهرباء (بالكيلوواط) لعينة عشوائية حجمها ٢٠ أسرة كيا يل بالكيلوواط:

٥٦ - ٦٥ - ٣٥ - ٦٥ - ٦٥ - ٦٥ - ٨٥ - ٦٥ استخدم اختبار الإشارة لاختبار ما إذا كان وسيط الاستهملاك الشهرى

استخدم اختبار الإشــارة لاختبار مــا إذا كان وسيط الاستهــلاك الشهري يســاوي ٦٠ كيلــوواط

 (٥٥ - ٧) إذا كانت أجرة المسكن الشهرية (بالدينار) لعينة عشوائية حجمها ١٤ أسرة هي كها يلي:

AF FY OF OV 30 YP OP

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن أجرة السكن الوسيطة هي ٧٧ دينار في الشهر

(٥٥ - ٧) لدراسة الفرق بين متوسطي الإنفاق الشهري (بالدينار) على المساكن في مدينتين، اخترنا عينة عشوائية من أسر المدينة الأولى حجمها ن. = ٩

وعينة عشوائية من أسر المدينة الثانية حجمها ن، = ٨ فكانت أجور المسكن الشهرية التي تدفعها هذه الأسر كما يلي:

C, : . 0 3 7 5 3 7 6 0 7 1 3 7 7 3 0 7 3 AY 3 /3

AT 6 17. 6 18. 6 10. 6 77 6 AT 6 7A 6 7. 60. : "0

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن وسيطي الإنفاق الشهري على المسكر. في المدنتين متساويان بجستوي معنوية ١٨.

(٥٦ - ٧) إذا كانت العينتان العشوائيتان التاليتان من مجتمعين متصلين ومتشابهين (ما عدا اختلاف محتمل في قيمتي الوسيطين)

الاول: ٢٥٨٥٠١٥٧٥١٥

161.6 260646A6V: William

اختبر بمستوى معنوية ٥/ الفرض القائـل بأن وسيط المجتمع الأول أقل من وسيط المجتمع الثاني.

(00 - ٧) شركة تملك مصنعين لانتاج البطاريات الجافة، اختيرت عينة عشوائية من المصنع الثاني حجمها ن، = ١٢ وعينة عشوائية من المصنع الثاني حجمها ن، = ١٣ فكانت مدة خدمة البطارية (بالساعة) في كل من بطاريات هاتين العينتين كما يلي:

الطانية: ۲۲۱ / ۱۶۲ / ۱۶۲ / ۱۶۱ / ۱۲۱ / ۱۲۱ / ۱۲۱ / ۱۲۱ / ۱۹۱ / ۱۹۱ / ۱۳۹ / ۱۳۱ / ۱۳۱ / ۱۳۱ / ۱۳۱ / ۱۳۹

اختبر بمستوى معنوية 1٪ الفرض القائل بأن وسيط مدة خدمة البطارية من انتاج المصنع الأول أصغر من وسيط مدة خدمة البطارية من انتساج المصنع الثاني.

(٥٨ - ٧) لاختبار أثر معالجة كياوية معينة على قوة تحمل نـوع معين من القـماش، أخذنا عينة عشوائية حجمها عشر قطع من القـاش وقمنا بقياس تحملها للشد قبل وبعد المعالجة الكياوية فحصلنا على النتائج التالية:

قوة الشد بالكيلوغرا	قوة الشد بالكيلوغرام قبل المعالجة	رقم القطعة	
يعد المعالجة	قبل المعاجفة		
4.4	Y **	١	
**	**	۲	
1.6	14	٣	
17	17	٤	
۲۰	Y1	0	
1A	14	7	
74	Yo	٧	
3 2	**	٨	
40	78	4	
77	YV	1.	

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن المعالجة الكيماوية غير فعّالـة في زيادة قوة الشد (استخدم اختبار الإشارة لمجتمعين).

٧- ٥٩) لاختبار الفرق بين متوسط وزن الطفل (بالكيلوغرام) عند الولادة حسب الجنس اخترنا عينة عشوائية من الأطفال الذكور حجمها ١٢ طفلاً وعينة من الأطفال الإناث حجمها ١٤ طفلة فحصلنا على البيانات التالية.

الأطفال الإناث	لأطفال الذكور
Y, A0 *	Y,4
Y,4	Y,90.
Y, Vo.	٣,١٠٠
Y,70.	٣, ٢٠٠
۲,000	٣,٠٠٠
۳,۰۰۰	Y,A**
۳, ۲۰۰	۲,۷0۰
7, 20.	4,000
۲,۰۰۰	۲,۸۷۰

الأطفال الإناث	الأطفال الذكور
Y,1**	۲,٧٦٠
7,00	7,04.
۳,۱۰۰	۲,٦٢٠
4,.0.	
Y, W	

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد فرق بين وزن الأطفال المذكور والأطفال الإناث عند الولادة باستخدام اختبار مان ـ وتني بمستوى معنوية 0٪.

(٧-٦٠) للدراسة متوسط عمر المرأة عند الزواج الأول في ثلاث مدن اخترنا عشوائياً ثلاث عينات من النساء فحصلنا على البيانات التالية (بالسنوات)

المدينة جـ	المليئة ب	المدينة أ
77	**	YV
40	71	1.4
**	1.4	17
17	17	10
14	10	19
18	YA	
14		

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن عصر المرأة عنـد الزواج في المـدن الثلاث متهائل بمستوى معنوية ٥٪.

الباب الثامن الفصل الأول

عليل التباين Analysis of Variance

السام (۸ ـ ۱ ـ ۱) مقدمة

نفترض في تحليل التباين أن لدينا عدة مجتمعات وإن متوسطاتها متساوية. أي أن

 $\mu = \dots = \mu = \mu : H$

 $(\Lambda - 1 - 1)$ $\mu \neq \dots \neq \mu \neq \mu : {}_{1}H$

حيث ك عدد المجتمعات (ك ≥ ٣).

وعلى سبيل المثال أفرض أن لدينا ثلاث آلات تنتج قطعاً لغيار السيارات ونسريد اختبار الفرض القائل بأن كلاً من الآلات الثلاث سوف تنتج في المتوسط نفس العدد من القطع في اليوم الواحد. أي أن

 $\mu_0 = \mu_0 = \mu_0 = \mu_0$

 $\mu \neq \mu \neq \mu : h$

ولاختبار هذه الفرضيات فإننا نراقب انتاج كل آلة في عمد عشواتي من الأيام التي نتتج فيها ونقارن قيمة المدالة الإختبارية المحسوبة من همذه البيانات بقيمة جمدولية مستخرجة من جدول توزيع المعاينة للدالة الإختبارية، فمإذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفرض.

ولكي يتمكن البـاحث من اختبار هـذا الفرض فـإنه يجب أن يكـون قادراً عـلى افتراض أن:

١ - كل مجتمع من المجتمعات له تـوزيع طبيعي بتـوقع عمر وتبـاين ٥٪ (ر = ١ 6 ٢ 6 ١ ك ك)

 $\sigma=\dots$ تباينات هذه المجتمعات متساوية، أي أن $\sigma=\dots$

٣ ـ المشاهدات في كل عينة مستقلة ومختارة بشكل عشوائي .

وتحليل التباين له تطبيقات واسعة في مختلف المجالات الزراعية والصناعية والتجارية.... النخ. وهو في مجمله يعتمد على تجزئة التباين الكلي (والذي يمثل مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد درجات الحرية) إلى مجموعات يرجع كل منها إلى عامل من العوامل المختلفة التي تؤثر على نتيجة التجرية.

(A - 1 - Y) تحليل التباين في اتجاه واحد

تقدو فكرة تحليل التباين في اتجاه واحد على مقارنة بيانات عدة عينات أو مجموعات مختارة من مجتمعات مختلفة. فإذا فرضنا أن عدد العينات أو المجموعات يساوي ك وعدد المشاهدات في كل عينة أو مجموعة نر (ر = ١ ٢ ٢ ٢ ٢ ك ك) فإننا نعر عن هذه المشاهدات على النحو التالى:

$$\frac{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-1}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-1}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1-1}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-1}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{$$

ويمكن تجزئة التفاوت الكلي في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٨) إلى تفاوت بين المجموعات Between Group Variation وتفاوت داخل المجموعات Between Group Variation على النحو التالى:

$$\frac{\nabla}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{if } (m_{0,1} - m_{0,1})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{if } (m_{0,1} - m_{0,1})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{if } (m_{0,1} - m_{0,1})^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } (m_{0,1} - m_{0,1})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}} =$$

ويمثل التفاوت داخل المجموعات (الحد الشاني من السطرف الأيسر للمعادلة (٣- ١ ـ ٨) الخبطأ Error أو الباقي Residual والفرض المذي نريد اختباره في هذه الحالة هو من الصورة (١ ـ ١ ـ ٨).

لقد افترضنا أن تباينات المجتمعات متساوية وتساوي كل منها قيمة واحمدة ٥٥ سواء كان الفرض صحيحاً أم خماطئاً. ونشاقش من خلال المشال التالي، طريقتمين مختلفتين لتقدير هذا التباين. ونستخدم هذين التقديرين في إجراء الاختبار:

الجدول التالي يبين الانتاج اليومي (بالـوحدة) خـلال أسبوع لشلاث عمال في مصنع معينُ:

العامل الثالث	العامل الثاني	المامل الأول	
4.3	YA	٧.	
77	17	11	
YA.	3.7	7	
۲.	14	17	
73	٧.	١٠	
**	18	٨	

والمطلوب تقدير تباين عمد الوحدات المنتجة بطريقتي داخل المجموعات Within-Group Method وبين المجموعات Between-Group Method واختبار الفسرض القائل بتساوي منوسط الإنتاج للعمال الثلاث.

الحل

 $H_0: \mu_{\prime} = \mu_{7} = \mu_{7}$

 $\tau \mu \neq \tau \mu \neq \mu : {}_{1}H$

حيث 44 متوسط الانتاجية للعامل الأول 42 متوسط الإنتاجية للعامل الثاني 44 متوسط الإنتاجية للعامل الثالث

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 + 21 + \cdots + 31}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{r\gamma + \gamma\gamma + \cdots + \gamma\gamma}{r} = 3\gamma$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma}{2} = \gamma \gamma$$

باستخدام الحد الثاني من الطرف الأيسر للمعادلة (٢ - ٢ - ٨) فإن

مجموع المربعات أو التفاوت داخل المجموعات= مج<u>ك مجند</u> (س_{ور} - س و.)

$$= (-7 - 71)^{7} + (71 - 71)^$$

$$(A-YI)^{T} + (AY-Y)^{T} + (FI-Y)^{T} + (3Y-Y)^{T} + (AI-Y)^{T} + (AI$$

$$(-7 - 7)^{7} + (31 - 7)^{7} + (77 - 37)^{7}$$

$$(-7 - 37)^7 + (53 - 37)^7 + (57 - 37)^7$$

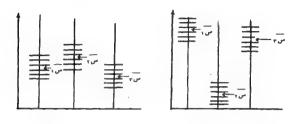
7...=

درجات الحرية (٧) = عدد المشاهدات - عدد الثوابت التي تمّ تقديرها من المشاهدات

ويلاحظ أن كل مشاهدة تقارن بالوسط الحسابي للمجموعة التي تنتمي لها هذه المشاهدة. ونثبت فيها يلي أن متـوسط مجموع المـربعات داخــل المجموعــات مقدّر غــير متحيز للتباين ٣٠٪:

$$\overset{\nabla}{-}\left(\underbrace{\frac{2^{k}}{2^{-k}}}_{-k}\underbrace{\frac{2^{k}}{2^{-k}}}_{-k}\left(\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}-\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}\right)^{T}\right)=\underbrace{\frac{2^{k}}{2^{-k}}}_{\ell \neq 1}\underbrace{\frac{2^{k}}{2^{-k}}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{\nabla}{-}\underbrace{m_{\ell,\ell}}_{-k}}_{-k}\underbrace{\overset{$$

ومن الجدير بالذكر أن قيمة النباين المقدّر بطريقة داخـل المجموعـات لا تختلف صواء كان الفرض صحيحاً ام غير صحيح كما هو ميين بالرسم البياني التالي :



شكل (١ ـ ١ ـ ٨ أم

شکل (۱ - ۱ - ۸ ب)

يستنسج من الشكل (١ ـ ١ ـ ٨ أ) أن الفسرض صحيح ومن الشكل (١ ـ ١ ـ ٨ ب) إن الفرض غير صحيح ومع ذلك فإن التضاوت داخل المجموعات لا يختلف في الحالة الأولى عنه في الحالة الثانية لأننا نحسب إنحرافات المشاهدات في مجموعة معينة عن الوسط الحسابي لنفس المجموعة.

وباستخدام الحمد الأول من الطرف الأيسر للمعادلة (٢ - ٢ - ٨) فإن: التفاوت بين المجموعات = ٦ (٢١-٢٢) ٢ + (٢٠ - ٢٢) ٢ + (٣٤ - ٢٢)٢ = ٨٤٨٨

$$\frac{18AA}{1-\gamma} = \frac{18AA}{\gamma}$$
 .. تقدیر (σ)

وإذا كان الفرض صحيحاً فإن طريقة بين المجموعات تعطي مقدّراً غير متحيز للتباين أما إذا كان الفرض غير صحيح فإنها تعطي مقدراً متحيزاً، وبـالتــالي فــإنــه يمكن استخدام توزيع فيشر (ف) لاختبار الفرض القائل بتساوي المتوسطات بقسمة تقدير التباين بطريقة بين المجموعات عـلى تقدير التباين بـطريقة داخــل المجموعــات، فإذا كانت هذه النسبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفـرض. ونوضـــع ذلك فيـــا يلي بالاعتباد على نتائج المثال السابق:

ف (المحسوبة) =
$$\frac{48}{6}$$
 = 7.7 المحسوبة) = 7.7 درجات حرية البسط 7.7 = 7.7 = 7.7 درجة حرية المقام 7.7 = 7.7 = 7.7

وإذا اخترنا ٥ * ٥ ، ١ ، • فإن ف (الجدولية) من جدول رقم (٦) هي

١, ٤ = ٠٠٠, ١٥, ٢٠٠

وبما أن ف (المحسوبة) > ف (الجدولية) فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسطات الإنتاجية للعيال الثلاثة غير متساوية).

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في جدول تحليل التباين Analysis of Variance Table (A NOVA)

على النحو التالي:

ف	متوسظ مجموع	درجات	مجموع	مصدر الاختلاف
	المربعات	الحرية	المربعات	أو التفاوت
7,41	YEE	۲	1844	بين المجموعات
	٤٠	10	7	داخل المجموعات
		14	****	الكل

(٣ ـ ١ - ٨) تحليل التباين في اتجاهين:

Two-way Analysis of Variance:

نفترض في هذه الحالة وجود متغيرين يؤثران على المتغير التابع (عدد الدوحدات المنتجة في اليوم أو مستوى إنتاجية القمع مثلاً). فإذا قدام باحث بزراعة أربعة أنواع غتلفة من القمع أ، ب، ج، د واستخدام في تسميد المتربة ثلاثة أنواع غتلفة من المخصّبات الكيهاوية Arcillizers ، ۲، ۳ فإنه ربما يرغب أو يجد نفسه في هذه الحالة بحاجة إلى اختبار الفوضين التاليين:

$$H_0^{(r)}: \mu_r = \mu_r = \mu_r = \mu_r$$
 (3 – 1 – 4).

وإذا كمان لدى الباحث أكثر من نتيجة واحملة Replicates لنفس النوع من القمح ونفس النوع من السماد فإنه ربما يسرغب أيضاً في اختبار فسرض ثمالت يتعلق بالتفاعل المزدوج Interaction بين المتغيرين السابقين (نوع القمح ونـوع السهاد). وفي هذه الحالة فإنه يمكن صياغة الفروض الثلاثة على النحو التالى:

$$\mu = \mu = \mu = \mu : (1)_0 H$$

$$H_0^{(Y)}: \mu_{\ell} = \mu_{T}$$
 (0-1-A)

No.Interaction نفاعل مزدوج الا يوجد تفاعل مزدوج

مشال ۱:

الجدول التالي يبين إنتاجية الدونم الواحد لاربعة أنواع غتلفة من القمح وثـــلاثة أنواع مختلفة من الأسمدة. والمطلــوب:

 ١- اختبار الفرض القائل بعدم وجود فرق في الإنتاجية بين الأنواع المختلفة من القمع بمستوى معنوية ٥٪.

٢ ـ اختبار الفرض القائل بعدم وجود فرق في الإنتاجية بين الأنواع المختلفة من
 الأسمدة بمستوى معنوية ١٪.

النوع د	النوع جـ	النوع ب	النوع أ	أنواع القبح أنواع الأسملة
٧	٦	٧	٤	النوع ١
7	11	1.	4	النوع ٢
٥	V	V	0	النوع ٣

الحسل:

يجزًا في هذه الحالة ، التفاوت أو الاختلاف الكلي إلى ثلاثة أجزاء : التفاوت بين الصفوف (أنواع الاسمدة) ، التفاوت بين الاعمدة (أنواع القمح) ، الباقي أو الحطأ .

المتوسط	المجموع	ه -	جد	ب	1	أنواع القمع أنواع الأسمدة	
٦	71	٧	٦	٧	٤	١	
4	7"7	7	11	1.	4	f	
٦	48	٥	٧	٧	0	٣	
		14	48	37	14	المجموع	
		٦	٨	٨	7	المتومسط	
V + V + a ·	+ 7 + 11 +	1 + 4	+ V +	7 + V + A£ = 0	-	المجموع الكلي	
			۷ :	= A£	=	المتوسط العام	
4) + *(V -	v) '(v - 1) + ^T (\	/ - V) 4	- Y)Y -	٤) =	التفاوت الكلي	
a) + "(V -	$-v)^r + (r$	11)+	'(v - 1	°) + [°] (1	<i>/</i> –		
^Y (V	' - 0) + Y(V	- V) +	. 4(A -)	Y) + ^Y (1	/ -		
+ 1 + 3 +	17'+4+8	ىقىر +	+ 1 +	- مقسر	+ 4 =		
			٤+.	ر + صقر	صة		
					£A =		
			(š	ع الأسمد	(بين أنوا ^ر	التفاوت بين الصفوف	
	(" - V)")	+ ^Y (V -	- 4) + ⁷	(v - 1)) { =		
			(1	+ \$ + 1) { =		
					= 37		
				القمح)	ين أنواع	التفاوت بين الأعمدة (ب	
(^T (V - 1)	+ ^T (V - A)	+ ⁷ (V	- A) + '	-			
				+1+1			
*							

تلخص النتائج السابقة في جدول تحليل التباين كما يلي:

ن	متوسط مجموع المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التفاوت
1	17	4	78	بين الصفوف
٣	٤	٣	11	بين الأعملة
	٧	٦	17	الباقي
		11	£A.	الكلي

لاختبار الفرض Ho (۱) فإن ف، ٢٥ م.، = ١,٠٥ لاختبار الفرض

وحيث أن ف (المحسوبة) > ف (الجمدولية) فمإننا نسرفض الفرض H و⁽¹⁾ (أي أنه يوجد فرق بين أنواع السهاد المختلفة من حيث أثرها على متوسط الانتاجية).

أما لاختبار الفرض H و (٢) فإن ف، ١٠١ - ٩,٧٨

وحيث أن ف (المحسوبة) < ف (الجدولية) فإننا نقبل الفرض H (^{۲)} (أي أنـه لا يوجد فرق بين متوسط إنتاج الدونم لأنواع القمح المختلفة).

مشال ۲:

أراد مزارع أن يحدد أثر ثلاثة أنواع من الأسمدة على ثلاثة أنواع غتلفة من البندورة فقام بتصميم تجربة اختبار فيها عشوائياً قطعتي أرض متساويتين من حيث المساحة، زرع فيها نوعاً من البندورة وأضاف إليها نوعاً من السهاد. فإذا جمع الانتاج في بهاية الموسم وكانت التتاثيج (بالألف كيلوغوام) كما هو مبين في الجدول التالي، كون جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفروض التالية:

متوسطات الانتاجية للأنواع المختلفة من البندورة متساوية متوسطات الانتاجية للأنواع المختلفة من الأسمدة متساوية لا يوجد تفاعل مزدوج بين نوع البندورة ونوع السياد.

۳	Y	١	نوع السمساد نوع البندورة
٧	7	4	t
٤	=	٨	
٦	٨	٥	
A	٦	7	
 ٦	٩	٧	٠
٨	A	1.	
			الحسل:
		بد اختبارها هي:	الفروض التي نو
			$H_0(t)$: $W_0 = 0$
			$H_0^{(7)}: \mu_{\ell} =$
		د تفاعل مزدوج	H ₀ (۱) : لا يوج

$$\frac{P + A + \Gamma + 6 + V + 3}{\Gamma} = \frac{PT}{\Gamma} = 0, \Gamma$$

$$\frac{P + A + \Gamma + 6 + V + 3}{\Gamma} = \frac{PT}{\Gamma} = 0, \Gamma$$

$$\frac{PT}{\Gamma} = \frac{P + A + \Gamma + \Gamma + A}{\Gamma} = \frac{PT}{\Gamma} = 0, \Gamma$$

$$\frac{P + A + 6 + \Gamma + V + \Gamma + A}{\Gamma} = \frac{A3}{\Gamma} = 0, V$$

$$\frac{P + A + 6 + \Gamma + V + \Gamma + \Gamma}{\Gamma} = \frac{O3}{\Gamma} = 0, V$$

$$\frac{P + A + C + \Gamma + V + \Gamma}{\Gamma} = \frac{T^2}{\Gamma} = 0, V$$

$$\frac{P + A + \Gamma + A + \Gamma + A}{\Gamma} = \frac{T^2}{\Gamma} = 0, V$$

$$\frac{PT}{\Gamma} = 0, \Gamma$$

$$V, \cdot = \frac{Y1}{\gamma} = \frac{A + 7, o + 7, o}{\gamma} = \frac{A + 7}{\gamma} =$$

التفاوت بين الصفوف (أنواع البنـدورة =
$*$
 × ۲ ((٥,٥ – * + (٥,٥ – *) + (م. - *) التفاوت بين الصفوف (أنواع البنـدورة = * + * (م. - *)

 $+ ^{V}(Y - V) + ^{V}(Y - V, 0)) + ^{V}(Y - V)$ التفاوت بين الأعملة (أنواع السياد) التفاوت بين الأعملة (م. ٢ - ۷) + $^{V}(Y - V)$

التفاوت الذي يعزى للتفاعل المزدوج =

$$\begin{array}{l} Y = (1,0,0,0) + (1,$$

وفيها يلي نكون جدولًا لتحليل التباين:

٠	متسوسط مجموع المربعات	درجات الحريه	مجموع المربعات	مصلر التماوت أو الأختلاف
Y, TA	٤,٥	۲	٩	بين الصفوف
٠,٧٩	١,٥	٧	٣	بين الأعمدة
1,44	T, V0	٤	10	التفاعل المزدوج
	١,٨٩	4	۱٧	الباقي
		17	2.5	المجموع

ف، ، ، ، ، ، ، ، ٣ = ٣ , ٤

 $^{(1)}$ وحيث أن $^{(1)}$ $^{(1)}$ $^{(1)}$ فإننا نقبل $^{(1)}$

ف، ۵۰۰، = ۴.۳ فإننا نقبل Ho (۲) ف، ۲۰۰۰ = ۳٫۱ -وحيث أن ۱٬۹۸ > ۳٬۱ فإننا نقبل Ho (۲)

(١ - ١ - ٨) تحليل التباين في ثلاثة اتجاهات

مربع لاتيني Latin Square

إذا استخدمنا المربع اللايتني فإننا نستطيع إزالة آثار عاملين من العوامل المؤثرة على نتيجة التجربة، فإذا أردنا مثلا دراسة الفروق بين أنواع غتلفة من البلور فإن الاختىلافات في حجم الإنتاج لا تحدث فقط من إختىلافات أنواع البلور وإنحا تنشأ أيضاً من إختلافات الأحواض، فإنه يجب أيضاً من إختلافات الأحواض، فإنه يجب تحيل كل بلزة في كل حوض وفي كل قطعة من القطع المختلفة داخل الحوض. والتصميم المناسب في هذه الحالة هو المربع اللاتيني حيث يمكن التحكم بخصوبة المتربة باختيار أحواض متعددة والتحكم باختلافات مواقع القطع في الأحواض باستزراع كل بذرة في كل موقع.

وإذا فرضنا مثلًا أن لدينـا أربعة أنـواع من البذور وأربعـة أحواض وأربـع قطع فإن تصميم المربع اللاتيني يأخذ الشكل التالى:

	الأحوا	إض (مسة	ويات الحرث)	(
		1	٧.	۳	٤
	1	t	ب	-	۵
القطع	11	ب	-	د	î
(مستويات الحصوبة)	Ш	-	۵	1	ب
	IV	د	1	<u>ب</u>	ج

ويجزأ التباين أو التفاوت الكلي في المربع اللاتيني إلى أربعة أجزاء مختلفة : التضاوت بين المصالحات (أ، ب، جه، د)، التضاوت بين الصفحف) (١١.١١ ال.١١)، التفاوت بين الاعمدة (١، ٢، ٣، ٤)، الخطأ أو الباقي .

> أما الفروض التي ربما نريد إختبارها فهي H₀ (١٠): علم = علم = علم

$$H_0^{(Y)}$$
: $\mu_{\ell} = \mu_{T} = \mu_{3} = \mu_{3}$

$$(\Lambda - 1 - 1)$$
 $\mu = \Pi \mu = \Pi \mu = \Pi \mu = \Pi \mu : (^{\circ})_0 H$

مثال:

أجريت تجربة للمقارنة بين أربعة أنواع من آلات تعبئة الأدوية في عبوات خاصة واستخدم كذلك أربعة عمال في أربعة أيام متنالية. وكانت النتائج (بالالف عبوة) كها هو مبين في المربع اللاتيني التالي:

		العيال		
£	۳	Υ	1	
(0.) 7	(TA) -	ب (۲۲)	(1.3)	1
(07) 1	(01) 3	ج (۴۵)	ب (٥٦)	الأيام اا
ب (٥٩)	(01)	c (17)	(f°) ÷	111
ج (۲۶)	ب (۱۵)	(£Y) Ī	د (۲۷)	IV

حيث أ، ب، جـ، د ترمز للآلات الأربع.

والمطلوب تكون جدول لتحليل التبـاين واختبار الفـرضيات التـالية وهي أيضـــًا المحددة في (٦ ـ ٦ ـ ٨):

$\mu = \mu = \mu = \mu = \mu$	(أي أن متــوســطات أعـــداد العبــوات
	الـزجاجيـة المنتجة بـالالات أ، ب، ج، د
	متساوية)
$H_0^{(Y)}$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	(أي أن متسوسهات أعداد العبسوات
	الزجاجية التي ينتجها العمال ١، ٢، ٣،
	٤ متساوية)
$H_0^{(Y)}$: $\mu_1 = \mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{23}$	لأى أن متوسطات أعبداد العبدات

الزجاجية المنتجة في الأيام الأربعة متساوية)

العيال (الأعملة)

$$|V| = (^{2} - (^{0})^{T} + (^{T} - (^{0})^{T} + (^{A} - (^{0})^{T} +$$

 $17 = \frac{11}{17} = \frac{11}{17} = 10$

$$(01-01)^{7} + (01-01)^{7} +$$

YYA. 0 =

وجدول تحليل التباين هو كيا يلي:

ف	متوسط	درجات	مجموع	مصدر المتغاوت
	مجموع	الحرية	المربعات	
	المربعات			
11, **	017,77	۳	108.	بين المعالجات (الآلات)
1,177	04,14	٣	171,0	بين الصفوف (الأيام)
٠,١٧٢	A	۳	75	بين الأعمدة (العيال)
	13,13	٦	YYA ,0	الباقي
		10	Y+18 .	الكلي

وإذا فرضنا أن مستوى المعنوية α + ۰, ۰ فإنه من جدول توزيع ف (٦ب)

وبالتالي فإننا نرفض $H_0^{(1)}$ ونقبل كلا من $H_0^{(7)}$ ، $H_0^{(7)}$

الفصل الثاني

تحليل التباين في الإنحدار

Regression Analysis of Variance

(۸ - ۲ - ۱) مقدمة (۸ - ۲ - ۱)

ندرس في هذا الفصل العلاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة باستخدام أسلوب تحليل التباين وذلك بتجزئة بجموع المربعات إلى جزئين أحدهما يمزى للانحدار والآخر يعزى للعواصل العشوائية، كما نستخدم هذا الاسلوب في إختبار مدى ملاءمة النموذج الجعلي البسيط لتمثيل العلاقة بين المتغير التابع والمتغير السقل.

(٢ - ٢ - ٨) تحليل التباين في النموذج الخطى البسيط

أُولًا: إختبار وجود العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل

إذا اعتبرنا النصوذج (٢٥ ـ ٢ ـ ٦) فإنه يمكن تجزئة التفاوت الكيل إلى تفاوت مفسر يعزى للإنحدار وتفاوت غير مفسر يعزى للعوامل العشوائية كها هو مبين في المعادلة (٤٥ ـ ٢ ـ ٦) ونستعرض فيها يلي الأساس النظري لإستخدام أسلوب تحليل التباين في إختبار وجود العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل (أي ٢٠٥١ أ = صفر)

$$^{Y}\sigma(Y-i)=^{Y}(\stackrel{\wedge}{-}\omega_{i})^{Y}=(i-Y)\sigma^{Y}$$

وبالقسمة على درجات الحرية (ن – ٢) فإن

$$(\Lambda - \Upsilon - V) \qquad \qquad {}^{\mathsf{T}}\sigma = ({}^{\mathsf{T}}(\bigwedge_{i=1}^{\Lambda} - \bigcup_{i=1}^{N} - \bigcup_$$

وهـذا يعني، كما أسلفنـا سابقـاً، أن متوسط مجمـوع مربعـات الأخطاء (MSE)

مقدر غير متحيرز للتباين ٢٥

أما القيمة المتوقعة لمجموع المربعات الذي يعـزى للإنحـدار فإنـه يمكن إيجادهـا على النحو التالى:

من المعلوم أن

مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار = مِنْ (ص، - ص)

$$= \stackrel{\wedge}{\uparrow}^{\gamma} \underbrace{\frac{1}{\gamma_{-1}}}_{(\gamma_{-1})} (\omega_{i_1} - \omega_{i_2})^{\gamma} \qquad (A - Y - A)$$

ومن (٨ - ٢ - ٨) فإن

 $(-\infty, -\infty)^{-1}$ المربعات الذي يعزى للإنحدار) = $\frac{7}{1} = (-1)^{1}$

(A-Y-4)

وعا أن

فان

$$(^{\wedge}_{1}) = v_{1}^{\wedge} \cdot)^{\uparrow}$$

وبالتعويض من (٣٥ ـ ٢ ـ ٦) في (١٠ ـ ٢ ـ ٨) فإن

وبالتعويض أيضاً من (١١ ـ ٢ ـ ٨) في (٩ ـ ٢ ـ ٨) نجد أن:

ت (مجموع المربعات الذي يعزى للاتحدار) =

$$(\Lambda - \Upsilon - 1\Upsilon)$$
 $G^{\intercal}(\overline{U_{\sigma}} - U_{\sigma})$ $G^{\intercal}(\Lambda - \Upsilon - 1\Upsilon)$

وهي نفس القيمة المتوقعة لمتوسط مجموع المربعات الذي يعنزى للاتحدار لأننا تحصل على المتوسطات بالقسمة على عدد درجات الحرية وهو واحد في النموذج الحطى البسيط. ويمقارنة متوسط مجموع المربعات الذي يعزى للاتحدار بمتوسط مجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية فإنهم لا يتساويان إلا إذا كانت أ = صفر (أي في حالمة عدم وجود علاقة بين س، ص).

وجدول تحليل التباين هو على الشكل التالي:

عمدر التغاوت مجموع المربعات درجات الحرية متوسط مجموع المربعات ف (۱) التغاوت مجموع المربعات المدني يعمرى المدني يعمرى المدنعدار (۲) التغاوت مجرت (صور - صر)
$$\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
 (۲) التغاوت مجرت (صور - صر) $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (۵) التغاوت المشوائية المعشوائية $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (صور - صر) $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (۲) الكلي مجرت $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (صور - صر) $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (۲) الكلي $\frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\gamma}$ (1) الكلي \frac

مثال:

إذا كانت البيانات التالية تمثل عدد السكان (بالألف) والمبيعات (بالوحملة) من منتج معين في ١٠ مدن، أوجمد معادلة الانحدار الحسطية للمبيعات (ص) على حجم السكان (س) ثم كون جدولاً لتحليل التباين واختبر الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين س، ص.

المبيعات بالوحلة (ص)	عدد الكسان بالألف (س)	
08	77	
4.	77	
YA	14	
£A.	f •	

المبيعات بالوحلة (ص)	د السكان بالألف (س) ۲٤	
41		
۳.	1A	
۳۸	٣٠	
£3	۳.	
17	18	
43	77	

الحسل:

سوف نجري الحسابات التالية لتوفيق الخط المستقيم (٢٤ ـ ٢ ـ ٦) بطريقة المربعات الصغرى.

س ص	س∀	المبيعات بالوحدة (ص)	حدد السكان بالألف (س)
1988	1747	0 8	77
VA*	777	4.	77
** 1 -	188	YA	17
194.	17	£A	٤٠
37A	٥٧٦	77	3.4
08.	377	۴٠	1A
118+	4	YA.	٣٠
144.	4	٤٦	٣٠
377	197	17	18
1274	1107	23	78
1.007	AFVV	774	المجموع ٢٤٦

وبالتعويض في (٢٩ ـ ٢ ـ ٦) 6 (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

أي أن: صُ = ه٠,١ س + ٩

أما الحسابات التالية فإنها لازمة لتكوين جدول تحليل التباين:

(ص - ص)۲	(ص - ص)۲	من	ص
1,	٥١,٨٤	٨,٢٤	٥٤
, ۲0	79,79	۳٦,٣	۳٠
3*, 177	٤٠,٩٦	71,7	YA
35,1.7	4,	٥١,٠	£A
***,**	٣,٢٤	77,37	41
****	13,3	44,4	۳.
•14,14	٦,٢٥	٤٠,٥	۳۸
• 15, 74	Y. , Yo	٤٠,٥	13
•17,34	04,74	YF, V	17
17,171	09,79	££, V	27
11,21	. ٧,٢٩		
44. **			

AA.,T. YaY,YY

المجموع ۳۲۸ $\frac{\pi \pi \pi}{\sigma} = \frac{\pi \pi}{1 \cdot \pi} = \pi \pi$

الجموع

۱۰ التفاوت الكل = ۲۵۲,۲۲ + ۸۸۰,۳۰

1177,07 =

1177,07

الفرض الذي نبريد اختباره Ho : أ = صفر (أي أنه لا يوجمد علاقمة خطية

مستقيمة وبسيطة بين علد السكان وحجم المبيعات).
مصلر التفاوت مجموع المربعات درجات الحرية متسوسط مجمسوع
مصلر التفاوت مجموع المربعات الحرية متسوسط مجمسوع
الإنحسار ٨٨٠,٣٠ ١ ٨٨٠,٣٠ ٢٧,٩٢

- 240 -

فإذا أردنا مثلًا اختبار الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجـد من جدول تـوزيع فيشر أن ف١٠٥مه.٠٠ = ٥٠٣

وحيث أن ٢٧,٩٢ > ٣,٥ فإننا نرفض الفرض (أي أنه يوجـد علاقـة خطيـة مستقيمة من الدرجة الأولى بين علـد السكان وحجم المبيعات).

ثانياً: اختبار مدى ملاءهة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين س، ص: يستخدم هذا الاختبار لتقرير ما إذا كانت العلاقة خطية أم لا. ويتم التحليل في هذا الاختبار تحت نفس الشروط المبينة في النموذج (٢٤ - ٢ - ٦) ما عدا خطية العلاقة. ولكي نتمكن من إجراء الاختبار يجب أن يتوفر لدينا أكثر من مشاهدة عند كل مستوى للمتغير س. وسوف نبين كيفية إجراء الاختبار بالتمرين التالى:

المتغير ص	التغير س	الشامنة
۱۸	۱۲	1
11	١.	Y
11	1.4	٣
۲	٧	٤
۱۳	18	٥
19	17	٦
۵	Y	٧
17	17	A
1.5	14	4
1.	1A	1.
١٣	1.	11
10	18	17

العمليات الحسابيـة المبينة في الجـدول التالي لازمـة لتوفيق الحط المستقيم (٢- ٢ - ٦) بطريقة المربعات الصغرى.

س ص	س*	ص	س	الشاهنة
717	331	1.4	11	1
11.	1	11	1.	Y
717	TYE	11	1.4	٣
18	٤٩.	۲	٧	٤
YAF	147	14	3.1	٥
***	PAY	14	17	٦
40	٤٩.	٥	٧	٧
3 * 7	PAY	14	14	A
174	188	18	11	9
144	377	١.	1.4	1.
14.	1 * *	14	1.	11
۲۱۰	141	10	١٤	۱۲
1944	3.44	188	701	المجموع

وبالتعويض في (١٩ ـ ٢ ـ ٦)، (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

$$\frac{111}{1 \vee 1} = \frac{1}{1 \vee 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{$$

أما الحسابات التالية فإنها لازمة لتكوين جدول تحليل التباين:

(ص - ص	(ص - ص)	مَنْ	ص
, ٤٩	12,49	11,5	, \1A
	• £ , • •	1.,.	11
1.,44	1.,44	10,5	14
17,70	27,70	٨,٥	4
**, 89	••,••	17,7	14
•7,٧٦	19,5%	18,3	14
14,40	17,70	A,0 .	٥
•1,71	•1,٧1	18,7	11
, ٤٩	٠٧,٢٩	11,7	18
1.,44	YA, •4	10,4	1.
	.4,	١٠,٠	14
, ٤٩	.0, 44	١٢,٧	١٥
79,77	14.,17		188

مجموع المربعات الذي يعزى للخطأ النقي Pure Error يحسب كها يلي:

$$(11 - 17) + (17 - 17) + (17 - 11) + (11 - 12) + (11 - 1A)$$

$$(11 - 10) + (12 - 17) + (7, 0 - 0) + (7, 0 - 7) + (11 - 1) + (11 - 10) + (10, 0 - 17) + (10, 0 - 14) + (10, 0 - 14) + (10, 0 - 14) + (10, 0 + 17) + (10, 0$$

أما مجموع المربعات الذي يعزى لعدم مطابقة Lack of Fit العلاقة الخطية = مجموع المربعات الذي يعزى للأخطاء - مجموع المربعات الذي يعزى للخطأ النفي = ١٤٠.١٦ - ١٩٠ - ١٩٠ - ١٤٧.١٦

درجات الحرية للخطأ النقي = عدد المشاهدات - عدد المجموعات التي فيها أرقام مكررة

= 71 - r = r

درجات الحرية لعدم المطابقة = ١٠ = ٤

والفرض الذي نريد اختباريه هو اله: العلاقة بين س، ص خطية.

وجدول تحليل التباين في هذه الحالة هو على النحو التالي

ن	متوسط	درجات	مجموع	مصدر التفاوت
	مجموع المربعات	الحرية	المريعات	
0,14	14,71	1	79,77	الإنحدار
	19, . 4	1.	19.,17	الباقي
	T1, V4	٤	187,17	١ _ عدم المطابقة
	٧,١٧	٦	٤٣,٠٠	٢ الحطأ النقي
	77,77	11	104,41	المجموع

وإذا أردنا إختبار الفرض بمستوى معنوية ١٪ فإن فعيم.٠٠٠ = ٩,١٥

وحيث أن ف < ٩,١٥ فإننا نقبل Hن، أي أن العلاقة بين س، ص خطية.

(٨ ـ ٢ ـ ٣) تحليل التباين في النموذج الخطي العام

لمرفة ما إذا كان المتغير التابع ص مرتبطا بالمتغيرات المستقلة فإنسا نستخدم تحليل التباين وذلك بتجزئة التفاوت أو الإختلاف الكلي إلى إختلاف مفسر يعزى للانحدار واختلاف غير مفسر يعزى للعوامل العشوائية كما هو مبين في المعادلة (٦١ - ٢)، وإذا اعتبرنا التمرين التوضيحي المعطى بعد هذه المعادلة فإنه يمكن تكوين جدول تحليل التباين كما يل:

مصدر التفاوت	مجموع	درجات	متوسط	ف
	المربعات	الحزية	مجموع	
الانحدار	TYA •		المربعات ۱٦٤٠	ν, ξοο
الحطأ أو الباقي	* 5.47	١٣	***	
الكل	*118*	10		

فإذا كان المطلوب هو إختبار الفرض التالي بمستوى معنوية ٥٪

Ho: أ، = صفر، أو = صفر

 H_0 : أ، \neq صفر، أ، \neq صفر

فإن ف ١٣٠٨ = ٩٠٠٠

وحيث أن ٧٠,٤٥٥ < ٣٠,٨ فإننا نرفض الفرض بمستـوى معنويـة ٥٪ (أي أنه يوجد علاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س٠١ س٧)

وإذا كان مستوى المعنوية ١ = ٥ ، • فإن

ن_{۲,۲}۲۰۰۰ = ۷,۲

وحيث أن ٧,٤٥٥ > ٧,٠ فإننا نرفض الفرض أيضاً بمستوى معنوية ١٪،

أسئلة وتمارين (٨)

(١ - ٨) لدراسة أثر العلف على وزن الدجاج اللاحم، إختيار باحث أربح مجموعات من الصيصان حديثة الفقس وقام بتغذية كل مجموعة منها بنوع معين من الأعلاف لمدة ثلاثة أسابيع فإذا كنان الوزن الإضافي الذي كسبته هذه الصيصان خلال المدة المذكورة هو كيا في الجدول التالي:

المجموعة (1)	المجموعة (٣)	المجموعة (٢)	المجموعة (١)
rv.	AY	90	٧,
A£	41	17.	1
44	1.4	1	11.
14.	111	1.0	40
110	41	1.4	AY

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض الفائل بأنه لا يوجد أثر لنوع العلف في زيادة وزن الدجاج اللاحم .

(٢ ـ ٨) لاختبار أثر المدرس في مادة أح ١٠١ على تحصيل الطلبة اختبرت عشوائياً
 ثلاث مجموعات من طلبة ثلاثة مدرسين وأجري لهم إختباراً مشتركاً في
 المادة فكانت علاماتهم كما يل:

المدرس (۳)	المدرس (۲)	للدرس (۱)	
٨٢	٧٤	٧٠	
٤٥	11	7.	
٧٢	0 *	A.F	
94	41	YA	
11		FA	

والمطلوب إختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد أثر للمدرس على مستوى تحصيل الطالب وذلك بمستوى معنوية ١٪.

(٣ - ٨) لدرامة أثر نوع الآلة النسيج على نسبة المعيب في إنتاج الكلسات النسائية إختار باحث عشوائياً ثلاث بجموعات من العيال، كل مجموعة منها تعمل على نوع مختلف من الآلات فكانت نسب المعيب في إنتاج هذه الآلات كما يلى:

المجموعة (٣)	المجموعة (٢)	المجموعة (١)
٠,٠٨	٠,٠١	٠,٠٥
٠,٠٢	٠,١٠	٠,٠٢
٠,٠٤	٠,٠٤	٠,٠٦
٠,٠٣	•,•0	٠,٠٤
٠,٠٥		

والمطلوب إختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد أثر لنوع آلة النسيج على نسبة المعيد في الكلسات المنتجة وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

(٤ ـ ٨) الجدول التالي بين كمية الصدأ المتراكم على حديد معالج بثلاثة أنواع من المواد الكياوية أ، ب، ج، إختبر بمستوى معنوية ٥/ ما إذا كان هناك فرق بين المعالجات الثلاث في تراكم الصدأ:

<u>ج</u>	ب	I
7	8	۳
٤	۲	10
٥	, t	٤
	٣	2

(٥ - ٨) البيانات التالية تمثل عدد الوحدات المتنجة في اليوم الـواحد لخمـــة عمال
 متماثلين من حيث المستوى والتدريب باستخدام أربع الآت مختلفة.

إختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بعدم وجـود فرق في الانتــاجية بين الالات المختلفة.

د	ج	ب	f	العامل
43	٤v	۳A	Eξ	١
23	۲٥	٤٠	F3	۲
44	2.2	77	Y" E	٣
**	13	44	23	٤
44	29	٤Y	Ϋ́A	ð

(A = 1)

مستورد يمكنه استيراد أربعة أنواع غتلفة من اللعبات الكهربائية وقبل أن يتخذ قرار الاستيراد قام بـاختبار ثـلاث لمبات من كـل نوع لمعرفة متوسط عمر المصباح (بالماثة ساعة) حصـل على النتائج التالية:

النوع الرابع	النوع الثالث	النوع الثاني	النوع الأول
44	3.7	Yo	٧.
Y *	٧٠	44.	14
٧٠	YY	**	*1

فهل يمكن الحكم (بمستوى معنوية ٥٪) بأن متوسطات العمر متساوية للأنواع المختلفة؟

(A - V)

لمدراسة العلاقة بين نوع العلف ونوع الأبقار ومتوسط الإنتاج اليومي من الحليب لهذه الأبقار أم الجليب لهذه الأبقار أم الجليب لهذه الأبقار أم ب، جـ) باستخدام ثلاثة أنـواع نختلفة من العلف (١، ٢، ٣) وكـانت المتاثج كما يل:

نوع البقر

<u>ج</u>	۰ پ	î		ثوع العلف
14	17	14	(1)	النوع الأول
۲.	YY	15	(Y)	النوع الثاني
17	14	*1	(T)	النوع الثالث

والمطلوب اختبار ما إذا كان هنالك أثر لنوع العلف أو لنوع الأبقار على متوسط الانتاج اليومي من الحليب وذلك بمستوى معنوبة ١٪.

الجدول التالي يبينُ نتيجة دراسة أجريت لمعرفة أثر نوع الـتربة ونــوع السياد على محصول القمع البعلي في إحدى المناطق (بالكفم / الدونم).

نوع التربة

(A - A)

(A-9)

نه و البذار

نوع السياد	1	ب	-
النوع الأول	٧٠٠	٦٨٠	٧١٠
النوع الثاني	70.	٧١٠	٧١٥
النوع الثالث	7A*	44.	V**
النوع الرابع	VY •	Y** .	or.
النوع الخامس	7	۵۸۰	11.

والمطلحوب تكوين جدول لتحليل التباين واختبار ما إذا كان لنوع السهاد ونوع التربة أثر على محصول القمح وذلك بمستوى معنوية ه٪.

14	100	••	•	ري البدار
(V1·) >	جـ (۱۸۰)	ب (۲۵۰)	(111)	النوع الأول (١)
	(۸/۰) >			النوع الثاني (٢)
	1(11)			النوع الثالث (٣)
	ب (۱۹۰)		د (۲۲۰)	النوع الرابع (٤)
من العماميا.	کل عامیل	ربة لمعرفة أثر	تائج هذه التج	والمطلوب تحليل ن
0 3 0	0 0		ول.	الثلاث على المحص

(١٠ - ٨) لمعرفة أثر مجموعة من البرامج التدريبية (أ، ب، ج.، د) على مستوى إنتاجية عيال شركة ما، قامت دائرة الأبحاث والدراسات في هذه الشركة

بتصنيفهم حسب المستوى التعليمي (عال، متوسط، منخفض) والحقت ستة عمال من كل مستوى بكل برنامج من البرامج الأربعة، ومعد انتهاء فترة التدريب والتحاقهم بالشركة جمع الإنتاج اليومي (بالوحدة) لكل منهم وكانت النتائج كما هو مين في الجدول التالي:

مستوى	البرنامج							
التعليم		1			ج		۵	
عال	9.	٨٥	AY	٨٥	AY	٨٤	٨٨	ΓA
	AY	٧٤	۸٠	A£	Ao	AV	A+	۸r
	۸٥	۸۸	٧٨	۸٠	4+	94	9.8	Aξ
متوسيط	۸۰	۸۳	٧٥	vv	۸٥	VY	٧٥	۸٥
-	٨٥	AV	٧A	٧٥	۷٥	٧٨	9.4	۸V
	٧٨	۸۱	٨٠	AY	AY	7.4	۸٠	٧٠
منخفض	AY	70	٨٥	AV	70	٧٠	٨٨	4+
•	v.	۸۰	٧٢	7.7	٧٠	77	۸۸,	۹٠
	٧٨	AY	٥٤	٧٢	٧٢	AY	44	۸۶

والمطلوب تكوين جدول لتحليل التباين واختبار، بمستوى معنويـة ٥٪، الفروض التالية:

- ١ _ لا يوجد أثر لمستوى التعليم على إنتاجية العامل.
- ٢ ـ لا يوجد أثر للبرنامج التدريبي على إنتاجية العامل.
- ٣ ـ لا يوجد تفاعل مزدوج بين مستوى التعليم والبرنامج التدريس.

(١١ - ٨) إذا كان عدد التلفزيونات المباعة يعتمد على قدرة البائع ونوع التلفزيون المباع. فإذا وجد أن عدد التلفزيونات المباعة في محل لتوزيع الأجهرة الكهربائية كها هو مين في الجدول التالي.

د	المائد والمائد						
				<u> </u>			نوع التلفزيون
٤	۳	٣	٤	٣	٦	0	1
صفر	۲	٧	1	۳	٤	0	
1.	٣	صفر	0	٤	٩	v	*
17	۲	٤	۲	٨	11	1.	·
صفر	١	١	صفر	١	۳		
٤	۳	1	١	صفر	٥	٤	·
	11	1. F	ع ج ۲ ۳ مغر ۲ ۷ مغر مغر ۳ ۱۰	ه صفر ۳ ۱۰ ۲ ۲ ۲ ۲	ب ب ب ب ب ۱ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب ١ ب </td <td>ع ب ب ب ا ا ا<!--</td--><td>ا ب ب ب ا<!--</td--></td></td>	ع ب ب ب ا ا ا </td <td>ا ب ب ب ا<!--</td--></td>	ا ب ب ب ا </td

كون جدولًا لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٪ الفروض التالة:

١- لا يوجد فرق بين قدراث الباعة أ، ب، جـ، د من حيث عدد
 التلفز يونات الماعة.

٢ ـ لا يوجد فرق بين الأنواع ١، ٢، ٣ من حيث عدد التلفزيونـات
 الماعة.

٣ ـ لا يوجد تفاعل مزدوج بين قدرة البائع ونوع التلفزيون.

إذا كمان لمدينا أربعة أنواع غتلفة من السيمارات (٢ ٥ ٣ ٥ ٣ ٥ ٤) واستخدمنا أربعة سواقين (١ ٥ ١١ ٥ ١١ ٥ ١١ وأربعة أنواع غتلفة من البنزين (أ ٥ ب ٥ جـ ٥ د) لمعرفة عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة بالجالون الواحد من البنزين وحصلنا على التتاثيج التالية:

	سائق	ال		
IV	m	П	1	السيارة
(4.) ?	جـ (٥٥)	ب (۱۰)	(63)	١
1 (73)	c (۸۲)	جہ (۵۸)	ب (۲۰) ب	4
ب (۱۳)	(EV) [د (۳۲)	(0Y) ÷	*
جـ (٥٠)	ب (٦٥)	(00)	د (۲۰) ه	٤

كوّن جدولًا لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ أثر كل من نوع السيارة ونوع البنزين والسائق على عـنـد الكيلومترات التي تقـطعها السيارة بالجالون الواحد.

(۱۳ ـ ۸) بالرجوع إلى بيانات التمرين (۲۰ ـ ۷)، كون جدولاً لتحليل التباين واستخدم هذا الجدول في اختبار ما إذا كان هناك علاقة بين حجم النفقات الشهرية وحجم المبيعات وذلك بمستوى معنوية ١٪. اختبر بمستوى معنوية ٥٪ خطية العلاقة بين س، ص.

(١٤ ـ ٨) بالرجوع إلى بيانـات التمرين (٢٦ ـ ٧)، كـوّن جلولاً لتحليل النباين واختيـر بمستوى معنوية ٥/ خطية العلاقة بين س، ص.

(۱۵ ـ ۸) بالرجوع إلى بيانـات التمرين (۲۷ ـ ۷)، كوّن جلولًا لتحليـل النباين واختبر بمستوى معنوية ۱۰٪.

١ _ الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين س، ص.

٢ ـ الفرض القائل بعدم ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة
 بين س، ص.

(١٦ - ٨) بالرجوع إلى بيانـات التمرين (٢٨ - ٧)، كون جدولاً لتحليـل التباين واستخدمه في اختبار الفرض التالي بمستوى معنوية ٥٪.
 ال : أ = صفر ، أ = صفر

(١٧ ـ ٨) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٣ ـ ٦)، كون جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض التالي:
 اله : ١٠ = صفر، أب = صفر

(۱۸ ـ ۸) بالرجوع إلى بيانات التمرين (۳۱ ـ ۷)، كوّن جلولاً لتحليل التباين واختير بحستوى معنوية 1٪ الفرض التالي: $H_0: 1 = m_0$

جلول رقم (١) توزيع ذي الحلين

1									
٠,۵	٠,٤	1	٠,٣	٠,٧	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	Z/,	٥
., 70	٠,٣٦٠٠	., 2 2 2 2	., :4	٠,٦٤٠٠	٠,٨١٠٠	• ,4• ۲0	٠,٩٨٠١	•	۲
ا٠٠٠٠م,٠٠	٠,٤٨٠٠	., 2222	27	.,77	٠,١٨٠٠	.,.40.	٠,٠١٩٨	١	1
., 40	.,13	.,1111.		.,	.,.,		٠,٠٠٠١	۲	
.,140.	٠,٢١٦٠	., 1937	. , 787.	.,014.	.,٧٢٩.	. 40VE	.,4٧٠٣		۳
., 2000	277.	., { } } }	., 221.	*, TAE	., 727.	.,1708		١	
.,770.	., ۲۸۸۰	., 7777	1,144	.,.41.	.,	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٠٣	٧	
., 170.	•,•78•	.,	.,	·,··A·	.,	٠,٠٠٠١	.,	۳	П
.,-140	.,1797	.,1470	., 72.1	.,2.41	1,7071	.,A180	.,43-1	•	٤
., 40	.,4501	.,4901	.,2111	.,8:41	., 7912	1,1710	.,.	١,	
., 440.	1037.	•, 4434	., 4181	., 1087	.,. EA1	.,.170	٠,٠٠٠	٧	
., 40	.,1077	•,•٩٨٨		.,. ٢03	.,٣	.,	٠,٠٠٠٠	٣	
.,.370		.,.178		.,17			•,•••	٤	
.,.٣1٢	•,•٧٧٨	٠,١٣١٧	1,17A1	٠,٣٢٧٧	.,09.0	.,٧٧٢٨	.,401.		٥
., 1017	.,4044	.,٣٢٩٢	.,72.7	1. , 2.47	٠,٣٢٨٠	1.7.77	., . EA.	١	1
., 4140	٣٤٥٦	. , 4747	.,4.4	1.4.54	.,.٧٢٩		.,	٧ .	
., 7170	., 77. 8	., 1787	., 1777		·, · · A1	111	Į.,	T	
.,1017	.,.٧٦٨	. , . 214	., . YAE	.,78	1.,	\(\cdot\)		٤	1
.,.*11	.,.1.8		.,	٠,٠٠٠٢	.,	·,	.,	٥	
.,.107	٠,٠٤٦٧	· , · AVA	٠,١١٧٦	., 4171	.,0718	· , VT01	.,9810		1
							1.001		
							18		
							٠,٠٠٠٠		
	.,.٣19								
	.,		1					1	

٠,٠	٠,٤	1	٠,٣	٠,٧	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	ζ/,	ن
· , · · v^	·, · YA ·	.,.oAo	* , * AYE	., ٢٠٩٧	·, £YAT	*,1944	.,4771	•	٧
1	.,18.2	-, Y- EA	., 1871	٠,٣٦٧٠	٠,٣٧٢٠	· , YaVY	.,.704	١.	П
1351,	11.77	۰,۳۰۷۲	۰,۳۱۷۷	., 1404	.371.	1,1817	.,	۲	П
., 1772	., 74.4	1,7071	•, 7774	.,1187		1,117	.,	۳	П
17V7.	-,1470	٠,١٢٨٠	.,-477	-,-TAY	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٠	٤	
1377.	٠,٠٧٧٤	.,.748		٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٠	.,	٥	
٧٤٠٠.	-, - 177	•,••18	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠	.,	.,	٦.	1
٠,٠٠٧٨	17	•,•••	٠,٠٠٠٢	• , • • • •	.,	•,••••	•,••••	٧	
	٠,٠١٦٨	.,.44.	۲۷۰۰,۰	٠,١٦٧٨	۰,٤٣٠٥	3777,	٠,٩٢٢٧		٨
	1,141	1,1071	.,1477	2700	FYAT.	+, TV4P	.,.٧٤٦	- v [1
1,1198	.,7.4.	۱۳۷۲،	., 7970	., 1477	*,1844	.,.010	.,	٧	-1
., ۲۱۸۸	., 4444	٠, ۲۷۲۱	1307,	.,1874	٠,٠٣١)	.,08	.,	4	-1
. 1772		٠,١٧٠٧	.,1711	209	13	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠	٤	
., ۲۱۸۸	.,1779	*, * TAT	.,-274	-, 9 Y	٠,٠٠٠٤]	٠,٠٠٠٠	اا		
1,1198	1,1217	., 171	.,.,	.,11	٠,٠٠٠٠	.,	ا	٦	- (
*, **17	•,••	, 72	.,17	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠]	٠,٠٠٠٠	v	
	····v		,1	•,••••	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠	.,	٨	

جدول رقم (٢) توزيع بواسون الإحتمالي المتجمع الصاعد

				1				
v	,		1	+	,		منر	1/0
					1,	+,999	.,901	٠,٠٥
1					١,٠٠٠	.,990	1,410	٠,١٠
1	{	1		1,	+,444	1,441	174.1	1,10
	Į			1,	+,994	*,4AY	*,414	٠, ٧٠
	-			1,	•,444	٠,٩٧٤	+,774	٠,٢٥
				1,	•,441	.,417	1,781	٠,٣٠
1	(١,٠٠٠	.,448	1,401	۰,۷۰۰	.,40
ŀ			1,	1,444	1,447	1,9TA	٠,١٧٠	1,81
	i i		1,***	+,444	*,444	.,410	٠,٦٣٨	٠,٤٥
			1,	+,444	*,441	1,411	٠,٦٠٧	٠,٥٠
			1, ***	*,994	*,4AY	324,*	.,044	.,00
			1,***	+,44v	.,477	٠,٨٧٨	.,089	1,30
		1,	1,444	1,441	٠,٩٧٢	*,411	.,044	1,70
		1,***	1,494	1,998	+,431	334,1	1,897	٠,٧٠
		1,	.,444	1,997	.,404	*, 477	٠,٤٧٢	۰,۷٥
		1, ***	.,444	1,441	.,407	1,414	., 884	٠,٨٠
		1,	4.44	*,984	.,480	٠,٧٩١	.,277	٠,٨٥
		1,	.,444	*,4AV	٠,٩٣٧	٠,٧٧٢	., 2.7	1,41
		١,٠٠٠	1,447	34.0	.,979	٠,٧٥٤	٠,٣٨٧	1,40
	1,***	+,444	+,447	1,441	.,471	۰,۷۳۱	٠,٣٦٨	1,
	1,	•,999	.,440	٠,٩٧٤	٠,٩٠٠	1,799	٠,٣٣٢	1,1
	1,	1,444	.,441	+,411	.,474	٠,٦٦٢	٠,٣٠١	1,4
	1,	1,444	1,444	.,407	٠,٨٥٧	٠,٦٢٧	٠,۲۷۲	1,7
3,	+,444	1,497	1,441	+,487	٠٫٨٣٢	+,047	1,727	١,٤
١,٠٠٠	•,444	1,997	147,	.,978	۶۸۰۹	1,00A	*, ***	١,٥

تابع جدول رقم (٢)

١.	,	٨	٧	,		£	۴	۲	١	صقر	, \ 9
				l		• ,4٧٦ • ,4•٧			· .		
		1	.,444	•,44٧	٠,٩٩٠	• ,418	۰,۸۹۱	۰,۷۳۱	٠,٤٦٣	.,170	١,٨
		1	i			•,407 •,487	1 1				
-					l í	-,47A					
						3-P, •		. 1			
1						*,V£A	. 1	- 1	· I		



جدول رقم (٣): التوزيع المعاد القياسي، المساحات تحت المنحل

سية غتارة	تكرارات ن	0.50				0.5.	
ح (ي < ي°)	ي*	ح (ي < ي*)	ي	ح (ي < ي*)	*5	ح(ي < ي^)	ي*
٠,٠٠٠٠١	1.770 -	*, ****	• , Yo ~	*,*YYA	۲,۰۰-	٠,٠٠٠	Y, Yo -
1,1	7,V14 ~	*, YEY*	٠,٧٠ -	*,****	1,40-	۰,۰۰۰۷	4.4
.,1	W 4	AVOY,	- 05,"	·, · YAY	1,4=-	·,···A	P, 10 -
1,	7.077-	1347,	1,11-	٠,٠٣٢٢	1.A0 -	.,1.	4.1
•,••	Y. 101 -	41.04.	.,00-		- ۱٫۸۰	•,••11	4.00-
	1,41	۰,۲۰۸۰	.,	.,.11	1, Vo -	.,14	4
٠,٠٣	1,441-	3.777.1	*, \$0 -	1,1887	1,4	*,**17	7,40-
1,18	1,701-	1,7887	.,	1840	1,70-	1,114	7,4
*,**	1,780-	1,777	40 -	*,*0£A	1,70-	*,***	Y, A0 -
*,*1	1,000-	',YAY	٠,٣٠-	1,111	1,00	*,****	Y,A+-
٠,٠٧	1,877-	*, 2*17	., 40 -	۸۶۶۰,۰	1,00-	.,	- 0V. F
1,14	1,200-	*.£7.V	٠,٧٠-	.,.٧٢0	1,20-	.,	Y, Y' -
1,14	1,461-	*,88*8	1,10-	٠,٠٨٠٨	1,81-	1,1121	- 0F, Y
	1, YAY -	1.53.1	۰,۱۰-		1,40-	٧٠٠٤٧	Y, 1 -
.,10	1, 171 =	1.83.1	.,.0-	*, *¶1A	1,40-	30**,	7,00-
.,4.	- 73A. ·			*,1*07	1,10-	.,77	r,00-
., 10	·, 3VE -			*,1101	1.4	٠,٠٠٧١	- 03,Y
1.7.	-370,1	,		1,1701	1,10-	YA	Y. 2
.,40	*, PA0 -	.,	صفر	., 1707	1,10-	1,1148	7,70-
1,80	- 707 -			+,1879	1,10-		7,70-
.,20	٠,١٢٦ -			*, 10AY	1,	*,*177	Y, 70 -
.,	صفر	.,0199	1,.0+	1,1411	.,40-	+, -174	7,71-
1	•,171	APTO, -	1,11+	+,1AE1	+,4+-	* . · 10A	Y, 10 -
1,30	*, 707	17000.	+,10+	*,1477	·,A0 -	+, -174	7.10-
.,70	۰,۳۸۰	٠,٥٧٩٢	.,4.+	+, 1114	٠,٨٠-	•,•٢•٣	1,00-

تابع جدول رقم (٣)

نسية غتارة	تكرارات		ی•	ح (ی<ی°)	ی*	ح (ى < ى°)	ی
ح (ی > ی)		ے (ی<ی [*])	ی	اع تفحق ا	3	3787	3
٠.٧٠	370,0	٠,٩٨٩٢	۲,۳۰	+,4-77	1,80	*,04AY	٠, ۲٥
.,٧0	377.	1,4417	Y, T0	.,4110	1,40	1,1174	٠,٣٠
٠,٨٠	*,AEY	+,441A	٧, ٤٠	1919.	1,61	٠,٦٣٦٨	., 40
, Aa	1.00	.,4474	Y, 20	.,977.	1,50	3007,	٠,٤٠
1,40	1, YAT	*,45TA	۲,۵۰	·,4777	1,00	*,1771	., 50
1,41	1,781	1,4427	Y,00	•,979.8	1,00	1,7410	٠,٥٠
19,44	1,200	1,9904	7,30	1032,1	1,20	·,V·AA	٠,٥٥
1,48	1,871	+,447+	4,70	1,9000	1,70	1,7707	1,71
1,48	1,000	.,4410	Y.V.	1,9008	1,7-	17877	٠,٦٥
1,40	1,720	.,444.	Y, Y0	.,9099	1,70	٠,٧٥٨٠	٠,٧٠
1,41	1,701	3485.	Y,A*	1377,1	1,4*	1,7771	۰,۷۵
17.47	1,441	*,44VA	Y,A0	47FF.	1.40	٠,٧٨٨١	1,41
.,970	1,411	1,4441	7,4.	+,4717	1,41	1,4.17	
1,44	300,7	4,9948	7,90	1347.	1,90	*,4019	4.
1,44	7,777	*,44AY	۳,۰۰	·,4777	γ,	., 4744	.,90
1,440	7,077	PAPP, 1	4,00	+,4Y4A	Y, . 0	***********	1,
1,444	P. 141	1.999	7,10	+,4ATI	7.10	.,4071	1,**
.4444	T,V19	1999.	4,10	*,4AEY	7,10	737A,*	1.10
+,44444	2.770	1,4447	4,11	+,4A11	7,7	+,AVE4	1,10
		,4948	4,40	AVAP,	07,7	P3AA.	1,7.

جدول رقم (٤): توزيع χ^۷، قيم χ^۷ لساحات عمدة في الطرف العلوي

.,44	٠,٩٠٠	٠,٠٠	٠,١٠	٠,٠٥	٠,٠١	.,1	درجات الحرية
·,···\0V	*,10A	., 200	۲,۷۰٦	134,7	0,750	1.,444	1
.,	., 711	1,741	6.7.0	0,441	4,710	17,410	۲
.,110	*,0A1	7,733	1.701	V,A10	11,721	17,774	۳)
•, 194	1,*18	4,400	V, VV1	4,844	17,177	14,870	£
•,008	1,310	8,401	4,177	11,.4.	10, 17	4.:014	٥
*,AYY	¥, Y+2	0,TEA	1.,750	17,097	17,417	YY, £0V	٦
1,174	Y,AYY	7,727	17,-17	18, -37	14,270	12,77	٧
1,787	4, 24.	V, TEE	17,717	10,0.7	7-,-4-	13,170	Α
Y, *AA	£,17A	A,TET	18,788	17,414	71,111	17,477	4
Y, OOA	SFA.3	4,727	10.44	14,5.4	17,114	44,044	١٠
7, 07	0,0YA	137,11	14,740	14,770	71,770	377,17	- 11
T, 4V1	1,4.8	11,720	14,084	71,-77	77,717	44.4.4	14
1.1.4	٧,٠٢٤	17,72	14,017	44,414	17,344	45,014	۱۳
٤,٦٦٠	V, V4-	17,774	11,-12	947,77	77,181	77,175	18
277,0	V30,A	18,779	11,1.4	78,997	T-,0VA	17,197	10
* 0,417	4,717	10,774	77,027	77,797	44,	79,707	13
3,848	1.,.40	17,774	75,714	TV, 0AV	77.2-4	£+, V4+	14
V, . 10	1.,410	17,774	PAP, 07	PFA,AY	TE,A-0	27,717	14
٧,٦٢٢	11,701	14,774	1V, Y-E	7.128	171,141	£4,44.	14
******	17,887	14,777	YA, E17	41,21.	TV,022	\$0,710	4.

تابع جدول رقم (٤)

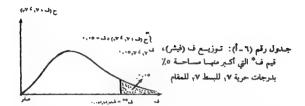
	المساحة في الطرف العلوي										
٠,4٩	٠,٩٠٠	٠,٥٠	٠,١٠	•,•0	٠,٠١	٠,٠٠١	درجات الحرية				
A, 49V	17,7**	11,117	14,710	77,771	TA, 4TY	£1,747	۲۱				
4,027	12,-21	11,777	4.414	77,412	£+, YA4	EA, YIA	44				
1-,147	18,484	11,177	77,	T0,1VY	£1,37A	£4,VYA	71"				
10,003	10,704	17,177	77,141	£7,£10	£7,4A+	01,174	72				
11,078	11, £VP	11,777	TE,TAY	27,701	28,718	07,770	40				



					v
	(ث > ث)	رف العلوي (ح	المساحة في الطر	-	درجات
٠,٠٠٠	٠,٠١	.,	1,10	٠,١٠	الحوية
17,70V	T1,AY1	17,7.3	1,718	Ψ, • YA	V
4,470	7,470	8,7.7	7,47+	1,441	٧
134.0	٤,٥٤١	۳,۱۸۱	Y, 707	1,174	۳
1,7.1	7,717	۲,۷۷٦	7,177	1,077	٤
٤,٠٣٢	7,770	7,071	7, - 10	1,571	٥
7,7.7	7,187	Y, 22Y	1,428	1,881	1
T,794	4,444	7,770	1,490	1,810	v v
4,400	FPA,Y	7,7.3	1,411	1,147	٨
7,70.	7,471	7,737	1,477	1,747	4
7,174	377,7	Y, YYA	1,417	1,777	1.
7,3:3	7,714	7,7-1	1,747	1,777	11
4,.00	Y,1A1	7,179	1,441	1,507	14
7,•11	7,300	7,17*	1,771	1,500	18
7,477	7,372	7,180	1,771	1,720	18
7,427	7,3.7	4,141	1,707	1,721	10
7,411	Y,0AT	٧,١١٠	1,721	1,777	17
Y, A9A	7,077	7,110	1,71	1,777	17
Y,AYA	Y,00Y	7,1-7	1,711	1,77	١٨
17,411	7,079	7,-47	1,474	1,774	19
Y,AEO	A70,7	FA*,Y	1,770	1,770	۲۰
7,071	7,014	7, . 4.	1,771	1,777	41
Y,A14	Y,0.A	Y, . VE	1,717	1,771	77
٧,٨٠٧	٧,٥٠٠	7, -74	1,718	1,714	77
	1	1	1	1	1 '

تابع جدول رقم (٥)

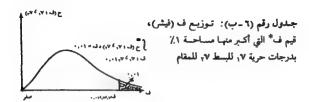
(((ت > ت*	ب العلوي (ح	حة في الـطرة	الما	۷ درجات
٠,٠٠٥	•,•1	•,• ٢٥	٠,٠٥	٠,١٠	درجات الحسرية
7,747	7,297	٧,٠٦٤	1,711	1,714	78
Y, VAV	Y, £A0	7, . 7 .	1,711	1,717	40
1,774	7, 274	7,007	1,7:3	1,710	73
7,771	7,177	7, 107	1,7.4	1,712	TV
7,717	٧,٤٦٧	Y, * 8A	1,7.1	1,717	YA
7,707	7,877	Y, . 20	1,144	1,711	79
Y, Vo-	Y, 20V	7, 127	1,147	1,710	۲٠
1,7.8	۲,٤۲۳	7,-11	1,748	1,7.7	1.
7,12.	7,74.	٧,٠٠٠	1,771	1,753	3.
7,117	Y,TOA	1,44	1,70A	1,744	17.
7,071	7,771	1,431	1,780	1, TAY	00



00	71	14	1	•	٤	7	٧	,	,v,
798.7	YE9,+	YET.4	778,	77.7	778,7	110,V	199,0	171,8	1
19,0	14,8	19,8	19,7	14,7	19,7	19,7	14,+	14,0	4
A.0	Α,٦	A,V	A,4	4,+	4,1	9,8	4,1	14,1	۳
1,0	۵,۸	0,9	1,1	3,8	1,8	1,1	3,4	٧,٧	اء
1,1	٤,٥	£,V	۵,۰	0,1	0,7	0,8	۵,۸	1,1	•
۲,۷	T,A	٤,٠	8,7	٤,٤	1,0	£,A	0,1	3,5	1
۳,۲	7.8	7,1	7.4	٤,٠	٤,١	2,2	1,7	0,7	V
7,4	7.1	7,7	7,1	۳,۷	Ψ,Α	1,1	٤,٥	0,5	^
¥,v	7.4	7.1	7,1	۳,۵	7,1	7,4	8,8	0,1	1
٧,٥	7,7	7,5	7,7	7.7	7,0	4.4	1,1	0,0	1.1
Y, £	7.1	¥,A	۳,۱	7,7	٢,٤	7,1	٤,٠	£,A	111
7,7	7,0	٧,٧	۳,۰	7.1	7,7	۳,۰	7,4	8,A	17
7,7	Y, £	7,3	7.4	۳,۰	7,7	7,8	Τ,Α	£,¥	15
7,1	7,2	٧,٥	Y.A	۳,۰	7,1	7,7	۳,۷	1,3	١٤
7,1	7,7	٧,٥	T,A	7,4	7,1	7,7	7,1	1,0	10
٧,٠	7,7	7,2	7,7	Υ,Α	7,-	7,7	7,1	٤,٥	17
٧,٠	7,1	7,5	7,7	Y,A	۲,۰	7,7	7,7	2,0	14
1,4	7,7	7,7	7,7	Y,A	7,4	Ψ, Υ	٣,٥	٤,٤	14
1,4	7,1	۲,۳	7,7	7,7	7,9	7,1	4,0	1,8	19
1,4	1,1	۲,۳	7,1	7,7	۲,4	7,1	٣,٤	1,5	Y+
1,4	٧,٠	7,7	7,7	7,7	Y,A	7,1	٣,٤	8,1	44
1,7	٧,٠	7,7	7,0	7,7	TyA	Y,*	7.8	2.4	TE.
1,7	٧,٠	7,7	٧,٥	7,7	7,7	T, ·	7,7	1,3	177

تابع جدول رقم (٦- أ)

∞	78	۱۲	7	٥	٤	٣	γ	١	\v\ \v\
1,7 1,0 1,6 1,7	1,4 1,4 1,A 1,V	Y,1 Y,1 Y,* 1,4 1,A	7,2 7,8 7,7 7,7 7,7	7,7 0,7 3,8 3,7 2,7 7,7	V, Y V, T V, T V, C V, C V, T V, T	7,7 P,7 A,7 A,7 V,7	7,7 7,7 7,7 7,1	7,3 7,3 1,3 1,3 7,4 7,4	7A T· E· 1· 1·



•										.٧/
00	78	14	^	٦	•	1	۳	٧	١	/,٧
1,711	3775	31.3	1480	2040	3770	0770	7.30	2999	10.3	١
19,7	44,0	99,8	44,8	44,5	44.1	44.4	44,4	44,+	94,0	٧
41,1	77,7	77,7	TV,0	17,4	YA,Y	YA,V	14,0	T+,A	78.1	۳
17,0	17,9	18,2	18,4	10,1	10,0	17,1	17,7	14,1	71,7	٤
4,1	4,0	4,4	10,0	10,0	11,1	11,8	17,1	14,4	17,1	٥
3,4	٧,٣	٧,٧	۸,۱	A,0	A,A	4,1	4,4	11,4	14,4	١
0,7	1,1	1,0	٦,٨	٧,٢	٧,٥	. V,4	A, £	4,3	17,7	Y
8,4	0,1	0,7	٦,٠	3,5	7,7	٧,٠	٧,٦	۸,٦	11.5	(1
1 2,8	£,V	ι	0,0	0,4	7,1	1,1	٧,٠	۸,٠	1.,1	1 1
7,4	1.5	Į.	0,1.	3,0	0,1	٦,٠	1,1	٧,٦	1.1.	1.
1 7,7	1 1.	2.2	8,7	1,0	9,0	0,7	7,7	Y, Y	4,1	1
٢,٤	1		8,0	£,A	0,1	0,8	l	1,4	9,5	1
۳,۲		1	7,3	1,3	2,4	0,4	۷,۰	1,7	1,1	1
۳,٠	7,8		1,3	2,0	£,V	0,	0,7	1,0	A,4	18
7,4	1	1	£,*	7,3	1,3	1,4	ł	7,8	A, V	
۲,۸	1		7,4	₹,₹	Į.	£,A	1	1,1	Α,ο	1 I
۲,٦	1	1	۴,۸	1,3	1,3	1	1	3,1	۸,٤	1
۲,٦	1	1	۲,۷		٤,٣	1	1	1,1	A,T	1
٧,٤	1	1	7,7	1	ı	1		0,4		
۲, ٤	1	1	7,1	1	1	2,8		0,4		1
۲,۲	ı		3,7	F,A	1	1	1	1	1	1
_ ٢,٢	Y, V	۲,۰	Y, 8	r,v	7,4	1 2,4	1 8.4	10,7	V,A	3.4

تابع جـدول رقم (٦ - ب)

00	7.5	11	٨	٦	٥	٤	٣	۲	١	1,1/2
7.1	۲,٦	۳,۰	7,7	7,3	۳,۸	٤,١	1,3	٥,٥	٧,٧	77
٧,١	٧,٥	1,4	۳,۲	٣,٥	Ψ,Α	٤,١	٤,٦	0,2	7,7	YA
۲,۱	7,7	Y,A	4,1	۴, ۵	۴,۷	٤,٠	1,0	0,4	٧,٦	7.
1,4	7,7	۳,۷	۳,۰	7,7	٣,٥	Ψ,A	٤,٣	٥,٠	٧,٣	٤٠
1,1	٧,٠	٧,٥	Y,A	٧,١	7,7	٣,٦	٤,١	£,A	٧,١	٦٠
1,2	1,4	7,7	۲,۷	۳,٠	7,1	7,0	٤,٠	1,3	1,4	1
١٫٠		۲,۲	٧,٥	Y,A	۳,۰	7,7	Ψ,Α		1,1	00

جلول رقم (۷) مماملات سيرمان لارتباط الرتب

ي اتجاه واحد)	قيم α (من اتجاه واحد)		
٠,٠١	٠,٠٥	ن ا	
-	١,٠٠٠	٤	
١,٠٠٠	1,4	0	
1,428	•, ۸۲٩	٦	
۲۶۸۹۳	٠,٧١٤	v	
۰,۸۳۳	*,787	A .	
۰,۷۸۳	٠,٦٠٠	9	
·,V\$7	•,078	١٠	
٠,٧٠١	*,0*8	17	
•,780	•, 207 .	18	
1.3.1	•, £70	٦٦	
٠,٥٦٤	• ,٣٩٩	١٨	
٤٣٥,٠	•,٣٧٧	٧٠	
٠,٥٠٨	•,٣٥٩	77	
•, 800	., 727	75	
0,870	• , ٣٢٩	77	
., ££A	٠,٣١٧	AA.	
•, £٣٢	٠,٣٠٦	7.	

المحتسويسات

£•-V	: بعض الادوات الرياضية	الباب الاول
10-4		القصا
9		(1-1-1)
h		(1-1-1)
t*		(1-1-1")
1		(1-1-8)
11		(1-1-0)
11		(1-1-1)
17	تعريف الفئة المكملة	(1-1-Y)
١٢	عمليات الفئات	(1-1-A)
18	الفئات المحدودة وغير المحدودة	(P-1-1)
18	الفئات المعدودة وغير المعدودة	(1-1-1)
10	الفئات المتصلة والمتقطعة	(1-1-11)
نشاتنات	بعض العلاقات الجبرية بين ال	(1-1-17)
رية ذات الحدين ٧٤-١٧	ل الثان : التباديل والتوافيق وتظ	الفص
١٧	التاديل	(1-7-1)
1	التوافيق	(1-1-1)
TY	نظرية ذات الحدين	(1-1-17)
ۥ-Ye	ا ۱۱۹۱۱ د د الصفيقات . ٠٠٠	الت
ia	ن رين .	
0	تعریف	(1-1-1)
0	تعریف	(1-r-r)
	تعریف	(1-1-1-1)
	تعريف المصفوفة الصفريه	(3-7-1)
	جع المصفوفات	(1-4-0)
٧	ضرب الصفوفات في ثابت .	/_\T 1\

ضرب المصفوفات	(1-7-7)
بعض انواع المصفوفات	(1_4-1)
المحددات	(1-4-4)
	(1-1-1)
	(1-1-11)
	(1-7-11)
	(1-4-14)
	(31-7-1)
ة وتمارين (١)	: اسئل
ې : نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها	
سل الأول: بعض التعاريف والنظريات الأساسية ٥٥-٤٣	الفص
تعاریف	
تعريف الاحتيال	
قوانين جمع وضرب الاحتيالات 80	
ن محلولة مجموعة (١-٢)	تماريو
ني: نظرية بيز ۲۰۰۰۷	الفصل الثاز
لَى الثَّالَثُ : شَجِرة القرارات	القص
ل الرابع: اتخاذ القرارات في ظروف المخاطرة ٧٧-٦٧	القص
ة وتحارين (٢)	استلة
ك : المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية ١١١ـ٨١	الباب الثالث
ل الاول: دالة كتافة الاحتيال ودالة الاحتيال التجميعي ١٤٠٨٢	القص
دالة الاحتهال للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها	("-1-1)
دالة الاحتمال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها ٨٤	(7-1-7)
دالة كثافة الاحتيال للمتغير المتصل وخواصها٨٢	(1-1-1")
دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل وخواصها	(3-1-7)
دالة كثافة الاحتمال المشتركة والهامشية والشرطية	(1-1-0)
ل الثاني : المزوم	الفصا
العزوم حول الصفر	(r-r-1)
العزوم حول الوسط الحسابي	(Y_Y_Y)

العلاقة بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي ٧٧	(Y-Y-Y)
معامل الالتواء والتفرطيح	(3-7-7)
مل الثالث : بعض ادلة وصف المتوزيعات المتكرارية ٩٩-١٠٣٩	الفص
دليل التوقع	(T-T-1)
دليل التباين	(1-1-1)
دنيل التعاير	(1-1-1)
بل الرابع : الدالة المولدة للعزوم	الغص
ة وتمارين (۲)	أسثا
ع: التوزيمات الاحصالية ١٦٥ - ١٦٤	
ع . الحول : النجارب المتكررة المستقلة وغيرالمستقلة ` ١١٩٧-١٩٣	ببب بر.ي الفم
س الروال . التجارب المحررة المستعلة وغيرالمستعلة ١٩٧١١٩	(8-1-1)
ايجاد القانون العام في حالة التجارب للتكورة	(6-1-1)
المستقلة _ قانون في الحدين أو توزيع في الحدين	اة
ن علولة على توزيع ذي الحدين	(1-1-3)
تمميم قانون ذي الحدين الى توزيع متعدد الحدود	(1-1-3)
توزيع بواسون	(3-1-3)
	(== 1-6)
توزيع الهايبرجيومترك	-4-
لل الثاني: التوزيمات المصلة ١٣٩	
التوزيع المنتظم او المستطيل	(1-7-3)
دالة جاما وتوزيع جاما	(7-7-3)
دالة بيتا وتوزيع بيتا	(7-7-7)
التوزيع الأسيّ	(1-7-1)
ة وتمارين (٤)	
س : توزيعات المينات الكبيرة والصغيرة ٢٠٦٠٠٠	الباب الحام
سل الاول : قاتون الاعداد الكبيرة ونظرية النزعة المركزية ١٩٧-١٩٩	الفم
قانون الاعداد الكبيرة	(0-1-1)
نظرية النوعة المركزية	(0-1-7)
لمل الثاني : التوزيع الطبيعي	القص
تعریف	(0-1-1)

At	عزوم التوزيع الطبيعي	(0-7-7)
A0	الدالة المولدة للعزوم	(°-Y-Y)
AY	التوزيع الطبيعي القياسي	(0-4-5)
^^	نظرية	(°-Y-°)
ن ۸۹	التوزيع الطبيعي ذي المتغيرير	(1-1-0)
الصغيرة۱۹۴	ل الثالث : توزيمات المينات	الغم
97	توزيع كاي تربيع	(0-4-1)
41		
41	توزيع ف	(0-1-4)
'• Y	ة وتمارين (٥)	استا
'• r- r • v	س : التقدير	الباب الساه
T	سل الاول : التقدير بتقطة	الفص
/••	خواص المقدر الجميد	(1-1-1)
۲۱۰	١-١-٦) عدم التحيز	1-1)
T18		
TIV		
719	١-٦) الكفاية	1-2)
ΥΥ	طرق التقدير بنقطة	(7-1-5)
۲۲	١-١-٦) طريقة العزوم	<u>-1)</u>
TYE	٢-١-١) طريقة الامكان الاكبر	-1)
للغرى واستخدامها في تقدير معالم	٦-١-١) طريقة المربعات الص	<u>-1")</u>
779	النهاذج الاحصائية	
· o_Y\\	سل الثاني : التقدير بفترة ثقة .	القم
W	فترة ثقة لمتوسط عجتمع معتاد	(7-7-1
vvr		(Y-Y-Y)
'AA		(7-7-1")
٧٦		(3-7-5)
لجتمع ممتاد ٧٩		(7-7-0)
۸۱		(F-Y-F)

فترة ثقة لمعالم النموذج الحطي البسيط والقيمة الاتجاهية للمتغير التابع	(%-Y-V)
حند مستوى معين للمتغير المستثل	
فترات ثقة لمعالم النموذج الحطي العام والقيمة الاتجاهية للمتغير التآبع	(7-Y-A)
عندمستويات معينة للمتغيرات المستقلة	
وتمارین (۲)	اسثلة
ع : اختبار القروض ۴۰۲-۲۰۰	
ل الاول : الاختبارات المعلمية	القصر
مقلعة	(Y-1-1)
الفرض المعدمي والفرض البديل	(Y-1-Y)
الحطأ من النوع الاول والحطأ من النوع الثاني	(Y-1-1")
كيفية اجراء الاختبار باستخدام الدالة الاختبارية ٣١٠	(Y_1_E)
قوة الاختبار	(Y-1-0)
اختبار الفرضيات الاحصائية باستخدام فترة الثقة ٣٢٠	(Y-1-7)
اختبارات متوسط المجتمع	(Y-1-Y)
اختبارات نسبة المجتمع	(V_1_A)
اختبارات الفروق المحتبارات الفروق	(V-1-4)
اختبار تباین مجتمع معتاد	(Y-1-11)
اختبار الانحراف المياري	(Y-1-11)
اختبار معامل الارتباط	(Y-1-1 Y)
اختبارات معالم النموذج الخطي البسيط٣٤٦	(Y-1-17)
اختبارات معالم النموذج الخطي العام ٣٤٩	(Y-1-12)
اختبارات جودة المطابقة والاستقلال ٣٥١	(V-1-10)
ل الثاني : الاختبارات غير البارامترية ٢٦٠- ٢٠٠	القصر
مقلمة	(V-Y-1)
اختبار معامل ارتباط الرتب	(Y-Y-Y)
اختبار الاشارة	(V-Y-Y)
اختبار لا لمان ـ وتني	(Y-Y-E)
اختبار H لكروسكال ـ والاس	(Y_Y_0)
TAY(Y) := 160	

الله الثامن (١٠٠٠ - ١٠٠٠ الفصل الاول: تحمليل التباين (١٠٠٠ - ١٠٠٠ الفصل الاول: تحمليل التباين في اتجاه واحد ١٠٠٠ تحمليل التباين في ثلاثة اتجاهات ١٠٠٠ تحمليل التباين في ثلاثة اتجاهات ١٠٠٠ ١٠٠٠ الفصل الثاني : تحمليل التباين في الاتحدار ١٠٠٠ ١٠٠٠ تحمل التباين في النموذج الخطي البسيط ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠			
الفصل الاول: تحمليل التباين في اتجاه واحد ٢٠٥٠) (-۱-٨) تحمليل التباين في اتجاه واحد ٢٠٠١) تحمليل التباين في المختاه التجاه في الانتخاص ٢٠٠١) المقدم ٢٠٠١ مقدمة ٢٠٠١ مقدمة ٢٠٠١ تحمليل التباين في النموذج الخطي البسيط ٢٠٠١) تحمليل التباين في النموذج الخطي السيط ٢٠٠١) اسئلة وتمارين (٨) تحمل التباين في النموذج الخطي العام ٢٠٠١) اسئلة وتمارين (٨) توزيع دي الحمدين ٢٠٠١ توزيع المتاد القياسي ٢٠٠١ توزيع صنون المتاد القياسي ٢٠٠١ توزيع صنون وفيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدول رقم (١) توزيع صنون فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدول رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدول رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدول رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع صنونيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٦- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٢- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٢- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٢- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٢- ب) توزيع ض (فيشر) ، قيم ض التي اكبر منها حمدال رقم (٢- ب) توزيع ض (١٠ البلدط ط المناط ا	£ = Y_8	, ۰۳	الباب الثامن
١٩-١٨) أعليل التباين في اتجاه واحد ١٠٥ ١٥-١٨) أعليل التباين في اتجاه واحد ١٥٠ ١٥-١٨) أعليل التباين في الاتحاء ١١٥-١٨ ١١٠ الفصل الثاني: أي التحدار ١٢١ ١١٠ المنابع التباين في النموذج الخطي البسيط ١٢١ ١١٠ المنابع التباين في النموذج الخطي السيط ١٣٠٠ ١١٠ المنابع التباين في النموذج الخطي العام ١٣٠٠ ١١٠ المنابع التباين في النموذج الخطي العام ١٣٠٠ ١١٠ المنابع المناب			الغص
(۱-۱-۸) تحلیل التباین فی اتجاهین ۱۰ الاعتان ۱۰ التباین فی اتجاهین ۱۰ الاعتان ۱۰ التباین فی الاته اتجاهات ۱۵ الفصل الثانی تحلیل التباین فی الاتعدار ۱۸-۲-۸) مقدمة ۱۲۰ مقدمة ۱۳۰ مقدما المقدم ۱۳۰ مقدمة ۱۳۰ مقد	4.3		(1-1-1)
(\$\(\text{\chi} \) \(٤٠٤	تحليل التباين في اتجاه واحد	(A-1-Y
الفصل الثاني : تحليل التبايين في الاتحدار (۸-۲-۱) و (۸-۲-۱) و مقدمة (۸-۲-۱) و البراي مقدمة (۸-۲-۲) و البراي قي النموذج الخطي البسيط (۲۰۲۰ مالي التبايين في النموذج الخطي العام (۲۰۲۰ مالي التبايين في النموذج الخطي العام (۲۰۲۰ مالي التبايين في النموذج الخطي العام (۲۰۲۰ مالي التبايين في المحدد (۲۰۰۱ میل	8 * A	تحليل التباين في اتجاهين	(A-1-1°)
(۱-۲-۸) مقلعة			
(۸-۲-۳) تحليل التباين في النموذج الخطي البسيط (۸-۲-۳) المثل التباين في النموذج الخطي العام (۲-۳) اسئلة وتحاين (۸) اسئلة وتحاين (۸) اسئلة وتحاين (۸) اسئلة وتحاين (۸) اسئلة وتحاين (۵، الحدين جدول رقم (۱) توزيع بواسون الاحتيالي المتجمع الصاعد (۲۰ جدول رقم (۳) التوزيع المعتاد القياسي (۲۰ جدول رقم (۵) توزيع المعتاد القياسي (۲۰ جدول رقم (۵) توزيع ت (ستيودنت) (۲۰ جدول رقم (۵) توزيع ت (ستيودنت) (۲۰ جدول رقم (۱- أ) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها جدول رقم (۲- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها جدول رقم (۲- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۷ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۸ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱/بدرجات حرية ۱۸ للبسط ۱۸ للمقام (۲۰ منها مساحة ۱۸ للمقام (۲۰ منها مس	£47-8	۽ : تحليل التباين في الاتحدار	الفصل الثاز
(۳۵-۳-۸) تعلیل التباین فی النموذج الخطی العام	-		(1-1-1)
اسئلة وتمارين (٨) جدول رقم (١) توزيع دي الحدين جدول رقم (٢) توزيع بواسون الاحتمالي المتجمع الصاعد جدول رقم (٣) التوزيع المعتاد القياسي جدول رقم (٤) توزيع ¾ (كاي تربيع) جدول رقم (٥) توزيع ت (ستيودنت) جدول رقم (١- أ) توزيع ف (فيش) ، قيم ف التي اكبر منها مساحة ٥/ بدرجات حرية ١٠ للسط ، ١٠ للمقام جدول رقم (١- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها جدول رقم (١- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها	173		(A_Y_Y)
جدول رقم (۱) توزيع في الحدين * \$2 جدول رقم (۲) توزيع بواسون الاحتيالي المتجمع الصاعد * \$2 جدول رقم (۳) التوزيع المعتاد القياسي \$2 جدول رقم (۵) توزيع لا (کاي تربيع) \$2 جدول رقم (۵) توزيع ت (ستيودنت) \$2 جدول رقم (۱- أ) توزيع ف (فيش) ، قيم ف التي اكبر منها مساحة ٥/ بدرجات حرية ١٠ للبسط ، ١٠ للمقام \$2 جدول رقم (۱- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف التي اكبر منها \$2 مساحة ١/ بدرجات حرية ١٠ للبسط ١٠ للمقام \$20	٤٣٠		
جدول رقم (٧) توزيع بواسون الاحتيالي المتجمع الصاعد * ؟ ؟ جدول رقم (٣) التوزيع المعتاد القياسي			
جدول رقم (٣) التوزيع المعتاد القياسي	£4.4	، رقم (١) توزيع ذي الحدين	جدوأ
جلول رقم (٤) توزيع ¾ (كاي تربيع)	٤٤٠ .	، رقم (٢) توزيع بواسون الاحتهالي المتجمع الصاعد	جدوا
جلول رقم (٥) توزيع ت (ستيودنت)	733	، رقم (٣) التوزيع المعتاد القياسي	جدوا
جدول رقم (١- أ) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف° التي اكبر منها مساحة ٥٪ بدرجات حرية ٧، للبسط ، ٧، للمقام	£ £ £ .	، رقم (٤) توزيع χ' (كاي تربيع)	جدوا
مساحة ٥٪ بدرجات حرية ٧٠ للبسط ، ٧٠ للمقام	£ £ 7 .		
جدول رقم (٦_ ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف° التي اكبر منها مساحة 1٪بدرجات حرية ٧، للبسط ٧، للمقام			
مساحة ١٪بدرجات حرية ٧٠ للبسط ٧٠ للمقام ٢٥٠	££A	ية ٥٪ بدرجات حرية ٧٠ للبسط ، ٧٠ للمقام	
		، رقم (٦ـ ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف° التي اكبر منها	جدول
جدول رقم (٧) معامل سبيرمان لارتباط الرتب ٢٥٤	٤0٠	نة 1٪بدرجات حرية ν، للبسط ν، للمقام	-luo

المراجع

اولا: المراجع العربيسة

- ١- احمد عباده سرحان ، مقدمة في طرق التحليل الاحصائي ، معهد البحوث والدراسات الاحصائية القاهرة ١٩٧٤ .
- ٢ ـ احمد عباده سرحان وثابت محمود احمد ، مقدمة العينات ، دار الكتب الجامعية ـ
 القاهرة ١٩٧١
- ٣- احمد عباده سرحان وثابت محمود ابراهيم ، تصميم وتحليل التجارب ، دار الكتب
 الحامية _ القاهرة ١٩٦٩
- عـ مدني دسوقي مصطفى ، مبادئ في نظرية الاحتيالات والاحصاء الرياضي
 وتطبيقاتها في الاستنتاج الاحصائى ، دار النهضة العربية ـ القاهرة ١٩٦٨ .
- ٥ ـ عرم وهيي محمود ، النظرية الاحصائية وتطبيقاتها ، الجزء الثاني ، المعهد القومي للتخطيط القاهرة ١٩٦٩
- ٦ عمد عادل سودان ، الرياضيات العامة ج١ ، ج٢ ، ج٣ ، دار العلوم للطباعة
 والنشر ـ موسكو ١٩٧٧
- ٧ ـ فيتشين جنيدنكو ـ المبادىء الأولية لنظرية الاحتمالات ، دار مير للطباعة والنشر ـ
 موسكو ١٩٦٩

ثانيا: المراجع الاجنبية

- I- Alexander M.Mood and Franklin A. Graybill; Introduction to the Theoryof Statistics. McGraw- Hill Book company. Inc. Second Edition 1963.
- 2- B.V. Gnedenko; The Theory of Probability, Mir Pulishers, Moscow 1969.
- 3- E. Bowen, M. Starr; Basic Statistics for Business and Economics McGraw-Hill Book Company, 1982.
- 4- Fadil H. Zuwaylif; Applied Business Statistics, Addison Wesley Publishing Company, Inc. 1974.
- 5- Frederick E. Croxton, Dudley J. Cowden and Sidney Klein; Applied General Statistics, Prentice- Hall of India Private Limited, New Delhi, Third Edition 1971.
- 6- G. Barrie Wetherill; Elementary Statistical Methods, Chapman and Hall, London, Third Edition 1982.
- 7- H.C. Sexena; Mathematical Statistics, S.Chand Co. (Pvt) Ltd, Ram Nagar. New Delhi- 55, Seventh Edition 1972.
- 8- H.T. Hayslett, advisory editor Patrick Murphy; Statistics Made Simple, Made Simple Book, London 1978.
- 9- J. Hanke, A. Reitsch, J. Dickson; Statistics Decision Models for Management, Allyn and Bacon, Inc. 1984.
- 10- J. Neter; W. Wasserman; Applied Linear Statistical Models, Richard D. Irwin, Inc. 1974.
- 11- Robert V. Hogg and Allen T. Craig; Introduction to Mathematical Statistics. Collier Macmilan International Editions, London, Fourth Edition 1978.
- 12- Taro Yamane; Mathematics for Economists, An Elementary Survey, Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi, Second Edition 1968.
- W. Daniel; Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences, John Wiley & Sons; Inc. New York 1983.
- 14—William Feller; An Introduction to the Probability Theory and its Applications, Wiley International Edition, Vol. I, Vol. II, Third Edition 1968.
- William Hays; Statistics for the Sosial Sciences, Holtsaunder International Editions, Second Edition 1980.
- 16- William Mendenhall, Richard L. Scheaffer and Dennis D. Wackerly; Mathematical Statistics With Applications, Duxbury Press, Boston, Massachusettes, Second Edition 1981



كار المناهج للنشر والتوزيع

اول طلوع جبل الحساين - سرفيس خط ٩ هاتف ١٦٦٦٧ - فاكس ١٦٦٧٠ ص.ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢ الأردن

